68. Pàgina 185

a) $f(x)$ no és derivable en tots els seus punts, ja que les derivades laterals en $x=-1$ no coincideixen.

b) $f'(x)<0$ en $(-\infty,-2)$ $\rightarrow$ $f(x)$ és decreixent en $(-\infty,-2)$.

$f'(x)>0$ en $(-2,+\infty)$ $\rightarrow$ $f(x)$ és creixent en $(-2,+\infty)$.

c) Té un mínim relatiu en $x=-2$ perquè és el punt en què s'anul·la la derivada.

d) $f'(x)=1$ si $x\geq -1$ $\rightarrow$ $f(x)=x+k$ si $x\geq -1$ perquè la derivada d'una recta és justament el seu pendent.

Per obtenir *k*, imposem la condició que ens donen: $f(1)=1\rightarrow 1+k=1\rightarrow k=0$

Així: $f(2)=2+0=2$

69. Pàgina 185

$y(x)=ax^2+bx+c$

La funció passa per $(1,\ 2)$ i $(2,\ 6)$ $\rightarrow$ $2=a+b+c$ i $6=4a+2b+c$

$y'(x)=2ax+b$

$y'(2)=4a+b$ equival al pendent de la recta tangent.

La recta tangent en $(2,\ 6)$ és $y=7x-8$ $\rightarrow$ $4a+b=7$.

Tenim, doncs, un conjunt de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=6 \\ 4a+b=7 \end{cases} \rightarrow a=3, b=-5, c=4$$

És a dir, $y(x)=3x^2-5x+4$

A continuació, estudiem la monotonia de la funció:

$y'(x)=6x-5$ $\qquad$ $y'(x)=0\rightarrow x=\frac{5}{6}$

En $\left(-\infty,\frac{5}{6}\right)$: $y'(x)<0$ $\rightarrow$ $y(x)$ és decreixent en aquest interval.

En $\left(\frac{5}{6},+\infty\right)$: $y'(x)>0$ $\rightarrow$ $y(x)$ és creixent en aquest interval.

En $x=\frac{5}{6}$ hi ha l'únic mínim relatiu de la funció.

70. Pàgina 186

$y(x)=ax^2+bx+c$

La funció passa per $(1,\ 0)$ i $(0,-2)$ $\rightarrow$ $0=a+b+c$ i $-2=c$

A més, té un mínim relatiu en $x=\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $y'\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

$y'(x)=2ax+b \rightarrow 2a\frac{3}{2}+b=0 \rightarrow 3a+b=0$

Tenim el sistema següent de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=0 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow a=-1,\ b=3\ ,c=-2 \rightarrow y(x)=-x^2+3x-2$$

A continuació, estudiem la monotonia de la funció:

$y'(x)=-2x+3 \qquad y'(x)=0 \rightarrow -2x+3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

En $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$: $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ és creixent en aquest interval.

En $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$: $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ és decreixent en aquest interval.

En $x=\frac{3}{2}$ hi ha l'únic màxim relatiu de la funció.

71. Pàgina 186

a) $y = x^3 + ax \qquad y'(x) = 3x^2 + a$

Com que hi ha un extrem relatiu en $x=2 \rightarrow y'(2)=0$:

$3 \cdot 2^2 + a = 0 \rightarrow a = -12$

És a dir, $y(x) = x^3 - 12x$.

b) $y(x) = x^3 - 12x \qquad y'(x) = 3x^2 - 12 \qquad y''(x) = 6x$

$y'(x) = 0 \rightarrow a = \pm 2$

$y''(2) = 12 > 0 \qquad y''(-2) = -12 < 0$

És a dir:

- $x=2$ és un mínim relatiu i $x=-2$ és un màxim relatiu.
- $y(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i decreixent en $(-2, 2)$.

72. Pàgina 186

$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y(0) = 0 \rightarrow d=0$

$y(1)=\frac{5}{6} \rightarrow a+b+c+d=\frac{5}{6} \rightarrow 6a+6b+6c=5$

$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y(x)$ té un màxim en $x=1 \rightarrow 3a + b + c = 0$

$y(x)$ té un mínim en $x=2 \rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Així doncs, tenim un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$\begin{cases} 6a+6b+6c=5 \\ 3a+b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{5}{12},\ b=\frac{5}{4},\ c=0 \text{ i } d=0$$

73. Pàgina 186

a) $y=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1} \rightarrow y'=\dfrac{2ax-2bx-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

Té un màxim en $x=-1 \rightarrow y'(-1)=0=\dfrac{-2a+2b}{4} \rightarrow a=b$

Passa per $P\left(-2,\dfrac{13}{5}\right) \rightarrow y(-2)=\dfrac{13}{5}=\dfrac{4a-2+b}{5} \rightarrow 4a-2+b=13$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} a=b \\ 4a+b-15=0 \end{cases} \rightarrow a=b=3$$

Així doncs, la funció és $y=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

b) Estudiem la monotonia de la funció:

El domini és tota la recta real.

$y'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $\qquad y'(x)=0 \rightarrow 1-x^2=0 \rightarrow x=\pm 1$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ $y(x)$ és decreixent en aquest conjunt d'intervals.

En $(-1,1)$, $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ $y(x)$ és creixent en aquest interval.

En $x=-1$ hi ha l'únic mínim relatiu de la funció, i en $x=1$, l'únic màxim relatiu.

74. Pàgina 186

$f(x)=\dfrac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2} \rightarrow f'(x)=\dfrac{2a^2(a^2-x^2)}{(2x^2-5ax+2a^2)^2}$

$f(x)$ té un extrem relatiu en $x=2 \rightarrow f'(2)=0=\dfrac{2a^2(a^2-4)}{(8-10a+2a^2)^2}$

La identitat anterior es verifica si $2a^2(a^2-4)=0 \rightarrow a=0$ y $a=\pm 2$

Així doncs, $a=\pm 2$, ja que a l'enunciat ens demanen descartar la solució $a=0$.

- Si $a=-2$:

$2x^2+10x+8=0 \rightarrow x^2+5x+4=0 \rightarrow x_1=-4, x_2=-1$

Així: $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-4,-1\}$

- Si $a=2$:

$2x^2-10x+8=0 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x_1=4, x_2=1$

Així: $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1,4\}$

75. Pàgina 186

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c} \longrightarrow y'(x)=\frac{(2x+a)(c-b)}{(x^2+ax+c)^2}$$

Té un extrem relatiu en $P(2,-1) \longrightarrow y'(2)=0 \longrightarrow \frac{(4+a)(c-b)}{(4+2a+c)^2}=0 \longrightarrow (a+4)(c-b)=0$

Passa pel punt (2, –1) $\longrightarrow y(2)=-1 \longrightarrow \frac{4+2a+b}{4+2a+c}=-1 \longrightarrow 4a+b+c=-8$

Passa per l'origen $\longrightarrow y(0)=0=\frac{b}{c} \longrightarrow b=0$ y $c\neq 0$

Resolem el sistema: $\begin{cases}(4+a)(c-b)=0\\ 8+4a+b+c=0\\ b=0\end{cases} \longrightarrow a=-4\,,\ b=0$ y $c=8$

76. Pàgina 186

$$y(x)=x\cdot e^{ax} \longrightarrow y'(x)=e^{ax}+ax\cdot e^{ax}=e^{ax}(1+ax)$$

Té un extrem relatiu en $x=1 \longrightarrow e^{a}(1+a)=0 \longrightarrow a=-1$

Així: $y(x)=x\cdot e^{-x}$.

77. Pàgina 186

$$f(x)=x+ax\cdot|x| \longrightarrow f(x)=\begin{cases}x+ax^2 & \text{si } x\geq 0\\ x-ax^2 & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\begin{cases}1+2ax & \text{si } x>0\\ 1-2ax & \text{si } x<0\end{cases}$$

Té un extrem relatiu en $x=1 \longrightarrow f'(1)=0 \longrightarrow 1+2a=0 \longrightarrow a=-\frac{1}{2}$

Per tant:

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 0\\ x+\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x>0\\ 1+x & \text{si } x<0\end{cases}$$

En $x=0$, $f(x)$ és contínua perquè coincideixen els límits laterals, i $f(x)$ és derivable perquè coincideixen les derivades laterals.

Ara ja podem calcular la monotonia de la funció i els seus extrems relatius:

$$f'(x)=0 \longrightarrow \begin{cases}1-x=0\\ 1+x=0\end{cases} \longrightarrow x=\pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ obtenim que $f'(x)<0 \longrightarrow$ La funció és decreixent.

En $(-1,0)\cup(0,1)=(-1,1)$ obtenim que $f'(x)>0 \longrightarrow$ La funció és creixent.

En $x=-1$ presenta el mínim relatiu i en $x=1$, el màxim.

78. Pàgina 186

$y(x) = x^3 + ax^2 - 3x \rightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - 3 \rightarrow y''(x) = 6x - 2a$

$y(x)$ té punt d'inflexió en $x = 1 \rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

79. Pàgina 186

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$

$f(x)$ té punt d'inflexió en $x = 3 \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \rightarrow a = -9$

$f(x)$ passa per $(1,0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow b + c = 8$

$f(x)$ té un mínim relatiu en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow b = 15$

Com que $b + c = 8$ y $b = 15 \rightarrow c = -7 \rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

80. Pàgina 186

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x - 5 \rightarrow y'' = 6x + 6$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

Dom $y = \mathbb{R}$

$y''(x) > 0$ en l'interval $(-1, +\infty) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x) < 0$ en l'interval $(-\infty, -1) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

b) $y = x^4 - 6x^2 \rightarrow y' = 4x^3 - 12x \rightarrow y'' = 12x^2 - 12$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Dom $y = \mathbb{R}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ és còncava en aquest conjunt d'intervals.

$y''(x) < 0$ en l'interval $(-1, 1) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$ Dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ és còncava en aquest conjunt d'intervals.

$y''(x) < 0$ en l'interval $(-1, 1) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2} \rightarrow y' = \dfrac{x^3 + 2}{x^3} \rightarrow y'' = -\dfrac{6}{x^2}$

$y''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow y$ és convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

e) $y = \sqrt{x^2 + 4} \rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x^2 + 4)^{3/2}}$ Dom $y = \mathbb{R}$

$y''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad y'' > 0 \quad \forall x \rightarrow y$ és còncava en tota la recta real.

f) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \rightarrow y'=-\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow y''=-\frac{2}{(4-x^2)^{3/2}}$ Dom $y=[-2,2]$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-2,2)$

$y''<0$ en $(-2, 2) \rightarrow y$ és convexa en $(-2, 2)$.

$y''>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \rightarrow y$ és còncava en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

g) $y=1-2\ln x \rightarrow y'=-\frac{2}{x} \rightarrow y''=\frac{2}{x^2}$ Dom $y=(0,+\infty)$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$

$y''>0$ per a tot $x>0 \rightarrow y$ és còncava en tot el seu domini.

h) $y=\ln(x^2-x)$ Dom $y=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y'=\frac{2x-1}{x^2-x} \rightarrow y''(x)=\frac{2(x^2-x)-(2x-1)^2}{(x^2-x)}=\frac{-2x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$y''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y''<0$ en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \rightarrow y$ és convexa en tot el seu domini.

i) $y=\frac{\ln x}{x} \rightarrow y'=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow y''=\frac{-3}{x^3}+\frac{2\ln x}{x^3}$ Dom $y=(0,+\infty)$

$y''=0 \rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x)>0$ en l'interval $\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x)<0$ en l'interval $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

j) $y=(x-1)e^x \rightarrow y'=xe^x \rightarrow y''=(x+1)e^x$ Dom $y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=-1$

$y''(x)>0$ en l'interval $(-1,+\infty) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x)<0$ en l'interval $(-\infty,-1) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

k) $y=\frac{x}{e^x} \rightarrow y'=\frac{1-x}{e^x} \rightarrow y''=\frac{x-2}{e^x}$ Dom $y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=2$

$y''(x)>0$ en l'interval $(2,+\infty) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x)<0$ en l'interval $(-\infty,2) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

l) $y=1+\sin x \rightarrow y'=2\cos x \rightarrow y''=-2\sin x$ Dom $y=\mathbb{R}$

Estudiem la funció en $(-\pi,\pi)$ perquè és periòdica de període 2π.

$y''=0 \rightarrow x=0$

$y''(x)>0$ en l'interval $(-\pi,0) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x)<0$ en l'interval $(0,\pi) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

m) $y = \cos 2x \rightarrow y' = -2\sin 2x \rightarrow y'' = -4\cos 2x$ $\quad$ Dom $y = \mathbb{R}$

Estudiem la funció en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ perquè és periòdica de període π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ és còncava en aquest conjunt d'intervals.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

n) $y = \sin^2 x \rightarrow y' = \sin 2x \rightarrow y'' = 2\cos 2x$ $\quad$ Dom $y = \mathbb{R}$

Estudiem la funció en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ perquè és periòdica de període π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en l'interval $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ és còncava en aquest interval.

$y''(x) < 0$ en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ és convexa en aquest interval.

81. Pàgina 186

$y(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 6 \rightarrow y'(x) = 4x^3 + 6x - 5 \rightarrow y''(x) = 12x^2 + 6$

$y''(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ ja que $12 > 0$ y $12x^2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

És a dir, $y(x)$ no té punts d'inflexió perquè la segona derivada no s'anul·la mai.

82. Pàgina 186

a) $y(x) = x^3 + ax^2 - ax + b \rightarrow y'(x) = 3x^2 + 2ax - a \rightarrow y''(x) = 6x + 2a$

$y(x)$ té un punt d'inflexió en $(1, 3) \rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$

$y(1) = 3 \rightarrow b = 2$

És a dir, $y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

b) $y'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $\quad$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = 1$

$y'(0) = 3 > 0$ i $y'(2) = 3 > 0 \rightarrow x = 1$ no és extrem relatiu $\rightarrow y$ és creixent en tot $\mathbb{R}$.

Ja hem vist que $y(x)$ té segona derivada nul·la en $x = 1$.

Estudiem $y''(x)$ al voltant de $x = 1$:

$y''(0) = -6 < 0 \rightarrow y(x)$ és convexa per a $x < 1$

$y''(2) = 6 > 0 \rightarrow y(x)$ és còncava per a $x > 1$

Això confirma que $x = 1$ és, efectivament, un punt d'inflexió.

83. Pàgina 186

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$

Punt d'inflexió en $x = 1 \longrightarrow f''(1) = 0 = 6 + 2a \longrightarrow a = -3$

La recta tangent que forma 45º amb l'eix *OX* és la recta $y = x$. Així:

$$f'(1) = 1 = 3 + 2a + b \longrightarrow 1 = 3 - 6 + b \longrightarrow b = 4$$

84. Pàgina 186

$y(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d \longrightarrow y'(x) = 4ax^3 + 2bx + c \longrightarrow y''(x) = 12ax^2 + 2b$

$y(x)$ passa per $P(0,3) \longrightarrow y(0) = 3 = d$

$y(x)$ passa per $Q(1,0) \longrightarrow y(1) = 0 = a + b + c + 3$

$y(x)$ té un extrem relatiu en $Q(1,0) \longrightarrow y'(1) = 0 \longrightarrow 4a + 2b + c = 0$

$y(x)$ té un punt d'inflexió en $x = \frac{1}{2} \longrightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = 12a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b \longrightarrow 3a + 2b = 0$

$y(x)$ està determinada, doncs, per l'esquema d'equacions següent:

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \longrightarrow a = 2,\ b = -3,\ c = -2,\ d = 3$$

Així, $y(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 3$.

Estudiem a continuació la naturalesa de l'extrem relatiu $Q(1,0)$:

$y'(x) = 8x^2 - 6x - 2$

$y'(-1) < 0$ i $y'(2) > 0 \longrightarrow$ L'extrem relatiu és un mínim.

85. Pàgina 186

$y(x) = x^3 - ax^2 - 4x + b \longrightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - 4 \longrightarrow y''(x) = 6x - 2a$

$y(x)$ té un punt d'inflexió en $x = \frac{2}{3} \longrightarrow y''\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \longrightarrow 6 \cdot \frac{2}{3} - 2a = 0 \longrightarrow a = 2$

$y(x)$ passa per $(3, 0) \longrightarrow y(3) = 0 \longrightarrow b = 3$

És a dir: $y(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$

86. Pàgina 186

Si *x* i *y* són les dimensions, resulta que: $xy = 12 \longrightarrow y = \frac{12}{x}$

Com que l'habitació nova s'afegeix a la casa, una de les parets coincidirà, de manera que no hi necessitarem cap totxo perquè aquesta paret ja està construïda.

Així, hem de minimitzar: $P(x, y) = 2x + y \longrightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$

$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2} = \frac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

I com que la longitud no pot ser negativa, resulta que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprovem que en aquest punt s'aconsegueix un mínim:

$P''(x) = \frac{24}{x^3} \rightarrow P''\left(\sqrt{6}\right) > 0 \rightarrow$ Es tracta d'un mínim.

Les dimensions de l'habitació són: $x = \sqrt{6}$ m i $y = 2\sqrt{6}$ m

87. Pàgina 186

Anomenem x i y les dimensions de la parcel·la. Com que estarà tocant amb la paret de la nau, es verifica que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Es tracta de maximitzar la funció superfície, que està determinada per:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ s'aconsegueix un màxim.

Les dimensions de la parcel·la són: $x = 50$ m i $y = 100$ m

88. Pàgina 186

Anomenem x l'aresta de la base, i y, l'altura del prisma quadrangular.

S'ha de complir que: $x^2y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{x^2}$

Com que un paraigüer no té base superior, hem de minimitzar la funció superfície, que està determinada per:

$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{20x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow$ S'aconsegueix un mínim.

Les dimensions del paraigüer són:

Aresta de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm

Altura: $y = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1.600}}$ dm

89. Pàgina 187

Considerem c_1, c_2 els catets d'un triangle rectangle qualsevol.

L'àrea, $A(c_1, c_2)$, d'aquest triangle està determinada per la funció $A(c_1, c_2) = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.

L'enunciat ens imposa la restricció següent: $c_1 + c_2 = 20 \rightarrow c_2 = 20 - c_1$

$A(c_1) = \frac{c_1(20 - c_1)}{2} = 10c_1 - \frac{1}{2}c_1^2$ $\quad A'(c_1) = 10 - c_1$ $\quad A'(c_1) = 0 \rightarrow c_1 = 10$

A més, $A''(c_1) = -1 < 0 \rightarrow A(c_1)$ té un màxim en $c_1 = 10$; i com que $c_2 = 20 - c_1 \rightarrow c_2 = 10$. Per tant, el triangle rectangle d'àrea més gran és el que té $c_1 = c_2 = 10$ cm.

Així doncs, l'àrea és: $A(10) = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ cm².

90. Pàgina 187

h: hipotenusa d'un triangle rectangle

c_1, c_2: catets del triangle rectangle

Pel teorema de Pitàgores obtenim que: $8^2 = c_1^2 + c_2^2 \rightarrow c_2 = \sqrt{64 - c_1^2}$

Així, la funció àrea està determinada per l'expressió següent:

$$A(c_1, c_2) = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{c_1 \cdot \sqrt{64 - c_1^2}}{2}$$

$$A'(c_1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{64 - c_1^2} - \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}}\right) \qquad A'(c_1) = 0 \rightarrow \sqrt{64 - c_1^2} = \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}} \rightarrow c_1 = \pm 4\sqrt{2}$$

Descartem la solució negativa i comprovem que la positiva és un màxim:

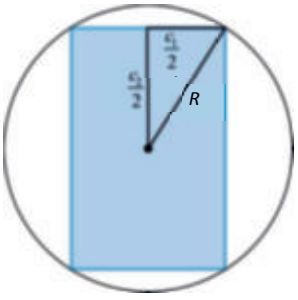
$$A'(5) = \frac{7\sqrt{39}}{39} > 0 \qquad A'(6) = \frac{-2\sqrt{7}}{7} < 0$$

Així doncs, en $c_1 = c_2 = 4\sqrt{2}$ cm la funció presenta el valor màxim:

$$A(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}) = 16 \text{ cm}^2$$

91. Pàgina 187

L'àrea d'un rectangle és $A(c_1, c_2) = c_1 \cdot c_2$, en què c_1, c_2 són els costats del rectangle.



Com que el rectangle està inscrit a la circumferència, obtenim que:

$$(2R)^2 \rightarrow = c_1^2 + c_2^2 \rightarrow c_2 = \sqrt{144 - c_1^2}$$

Així, la funció que volem maximitzar és la següent:

$$A(c_1) = c_1\sqrt{144 - c_1^2}$$

$$A'(c_1) = \sqrt{144 - c_1^2} - \frac{c_1^2}{\sqrt{144 - c_1^2}} \qquad A'(c_1) = 0 \rightarrow 144 - c_1^2 = c_1^2 \rightarrow c_1 = \pm 6\sqrt{2}$$

Descartem el valor negatiu i comprovem que $c_1 = \pm 6\sqrt{2}$ és un màxim:

$$A''(c_1) = \frac{-c_1}{\sqrt{144 - c_1^2}} - \frac{2c_1\sqrt{144 - c_1^2} + \frac{c_1^3}{\sqrt{144 - c_1^2}}}{144 - c_1^2} \qquad A''(6\sqrt{2}) = -4 < 0$$

Els rectangles de costat $c_1 = c_2 = 6\sqrt{2}$ cm són els que maximitzen l'àrea.

El rectangle d'àrea màxima que encaixa en el cercle de radi $R = 6$ cm és un quadrat de costat $c = 6\sqrt{2}$ cm.

92. Pàgina 187

L'àrea d'un rectangle és $A(c_1,c_2)=c_1\cdot c_2$, en què c_1, c_2 són els costats del rectangle.

Com que el rectangle està inscrit a la circumferència, obtenim que:

$$(2R)^2 \rightarrow = c_1^2 + c_2^2 \rightarrow c_2 = \sqrt{4R^2 - c_1^2}$$

Així, la funció que volem maximitzar està determinada per l'expressió següent:

$$A(c_1) = c_1\sqrt{4R^2 - c_1^2}$$

$$A'(c_1) = \sqrt{4R^2 - c_1^2} - \frac{c_1^2}{\sqrt{4R^2 - c_1^2}} \qquad A'(c_1) = 0 \rightarrow 2c_2(c_1^2 - 2R^2) = 0 \rightarrow c_1 = \pm R\sqrt{2}$$

Descartem el valor negatiu i comprovem que $c_1 = R\sqrt{2}$ és un màxim:

$$A''(c_1) = \frac{-c_1}{\sqrt{4R^2 - c_1^2}} - \frac{2c_1\sqrt{4R^2 - c_1^2} + \frac{c_1^3}{\sqrt{4R^2 - c_1^2}}}{4R^2 - c_1^2} \qquad A''(R\sqrt{2}) < 0$$

Així doncs, $c_1 = R\sqrt{2}$ és un màxim per a la funció $A(c_1,c_2) = c_1\cdot c_2$.

El rectangle d'àrea màxima que encaixa en el cercle de radi R és un quadrat de costat $c_1 = R\sqrt{2}$ cm.

93. Pàgina 187

Considerem *x* i *y* les dimensions del rectangle, i *d*, la diagonal.

D'una banda, l'àrea del rectangle està determinada per $xy = 3$.

D'altra banda, pel teorema de Pitàgores obtenim que $d\cdot d = d^2 = x^2 + y^2$.

Així, la funció que volem minimitzar és: $P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} \qquad P'(x) = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

L'única solució vàlida és $x = \sqrt{3}$. Comprovem que és un mínim de la funció:

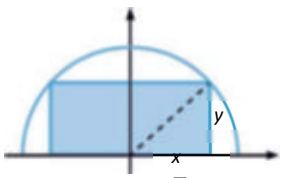
$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''(\sqrt{3}) > 0$$

Les dimensions del rectangle $x = \sqrt{3}$ i $y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ és a dir, tenim un quadrat de $\sqrt{3}$ m de costat.

94. Pàgina 187

Considerem *x* la meitat de la base del rectangle, i *y*, l'altura. Es verifica que:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$



La funció que volem maximitzar és:

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} \qquad A'(x) = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

En $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A'(x) > 0$ i en $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 5\right) \rightarrow A'(x) < 0$. Així doncs, en $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ presenta un màxim.

Així, la base del rectangle d'àrea màxima és de $5\sqrt{2}$ cm, i la altura, de $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

95. Pàgina 187

l: longitud del costat del quadrat *r*: radi del cercle

Sabem que la suma de perímetres és de 98 cm.

A més, si aproximem el valor de π a 3, obtenim: $4l + 6r = 98 \rightarrow l = \frac{49-3r}{2}$

La funció que volem minimitzar és: $A(r,l) = l^2 + 3r^2 \rightarrow A(r) = \left(\frac{49-3r}{2}\right)^2 + 3r^2$

$A'(r) = \frac{21r-147}{2}$ $A'(r) = 0 \rightarrow 21r - 147 = 0 \rightarrow r = \frac{147}{21} = 7$

Com que $A''(7) > 0$, podem assegurar que en $r = 7$ cm presenta el mínim de la funció. Per tant, el costat és de:

$$l = \frac{49-3r}{2} \xrightarrow{r=7} l = 14 \text{ cm}$$

Així doncs, perquè la suma d'àrees sigui mínima, el costat del quadrat i el radi del cercle han de fer 14 cm i 7 cm, respectivament.

96. Pàgina 187

c: costat de la base quadrada del prisma *h*: altura del prisma

$A_{\text{Total}} = 24 \rightarrow 2c^2 + 4ch = 24 \rightarrow h = \frac{12-c^2}{2c} = \frac{6}{c} - \frac{c}{2}$

Així, la funció que volem maximitzar és: $V(c) = c^2\left(\frac{6}{c} - \frac{c}{2}\right) = 6c - \frac{c^3}{3}$

$V'(c) = 6 - \frac{3}{2}c^2 = 0 \rightarrow 6 = \frac{3}{2}c^2 \rightarrow c = \pm 2$

L'única solució vàlida és *c* = 2. Comprovem que amb aquest valor s'arriba al màxim:
$V''(c) = -3c = 0 \rightarrow V''(c) = -6 < 0$

Per tant, obtenim que $h = \frac{6}{2} - \frac{2}{2} = 2$ cm.

Així doncs, el prisma que maximitza el volum és un cub de 2 cm de costat.

97. Pàgina 187

r: radi de la base del cilindre *h*: altura del cilindre

La cartolina rectangular, segons les condicions de l'enunciat, tindrà dimensions *h* i *r*, per tant es complirà que:

$$2h + 2r = 60 \rightarrow h = 30 - r$$

La funció que optimitzarem és:

$$V(r,h) = \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$$

$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2$ $V'(r) = 0 \rightarrow 60\pi r = 3\pi r^2 \rightarrow r = 0,\ r = 20$

La solució vàlida és $r = 20$. Comprovem que és on presenta el màxim: $V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0$

Per tant, obtenim que $h = 30 - r \xrightarrow{r=20} h = 10$ cm.

Així doncs, les dimensions de la cartolina per aconseguir el volum màxim són 20 cm × 10 cm.

98. Pàgina 187

g: longitud dels costats iguals *r*: longitud de la meitat del costat desigual

Perímetre = 10 $\longrightarrow 2g + 2r = 10 \longrightarrow g = 5 - r$

$$V_{con} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Pel teorema de Pitàgores, obtenim que $h^2 = g^2 - r^2$. Així, la funció que volem maximitzar és:

$$V(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{(5-r)^2 - r^2}}{3} = \frac{\pi r^2 \sqrt{25 - 10r}}{3}$$

$$V'(r) = \frac{2\pi r}{3}\sqrt{25-10r} - \frac{5\pi r^2}{3\sqrt{25-10r}} \qquad V'(r) = 0 \longrightarrow 2r(25 - 10r) = 5r^2 \longrightarrow r = 0,\ r = 2$$

La solució vàlida és $r = 2$ m. Comprovem que és on presenta el màxim:

En (0, 2) obtenim que $V'(r) > 0$ y en $(2, +\infty)$, $V'(r) < 0$

Per tant, obtenim que $g = 5 - r \xrightarrow{r=2} g = 3$ m.

Així doncs, perquè el volum del con que es genera sigui màxim, els costats del triangle han de ser de 3 m, 3 m i 4 m.

99. Pàgina 187

x: radi de la base del cilindre

y: longitud de la meitat de l'altura del cilindre

R = 9 cm és el radi de l'esfera.

Es verifica que $x^2 + y^2 = R^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 81 \longrightarrow y = \sqrt{81 - x^2}$.

La funció que volem maximitzar és:

$V(x, y) = \pi x^2 h$, en què $h = 2y$

$$V(x, y) = 2\pi x^2 y \longrightarrow V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2} = 2\pi\sqrt{81x^4 - x^6}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} \qquad V'(x) = 0 \longrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{54} = \pm 3\sqrt{6}$$

La solució vàlida és $x = 3\sqrt{6}$. Comprovem que és on presenta el màxim:

En $\left(0, 3\sqrt{6}\right) \longrightarrow V'(x) > 0$ En $\left(3\sqrt{6}, +\infty\right) \longrightarrow V'(x) < 0$

Així, el radi i l'altura del cilindre de volum més gran que es pot inscriure en una esfera de radi 9 cm són:

Radi = $3\sqrt{6}$ cm Altura = $2\sqrt{81 - 54} = 6\sqrt{3}$ cm.

100. Pàgina 187

Anomenem *r* i *h* el radi i l'altura del con, respectivament.

Es compleix que:

$$r^2 + (h - 9)^2 = 81 \longrightarrow r^2 = 81 - (h - 9)^2 = -h^2 + 18h$$

La funció que hem d'optimitzar és:

$$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h \longrightarrow V(h)=\frac{1}{3}\pi(-h^2+18h)h=\frac{1}{3}\pi(-h^3+18h^2)$$

$V'(h)=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+36h)=\pi(-h^2+12h)$ $\quad V'(h)=0 \longrightarrow h=0,\ h=12$

La solució vàlida és $h=12$. Comprovem que és on presenta el màxim:

$$V''(h)=\pi(-2h+12) \longrightarrow V''(12)<0$$

Així doncs, les dimensions del con amb el volum més gran són:

Altura = 12 cm $\qquad$ Radi de la base = $\sqrt{-12^2+18\cdot 12}=6\sqrt{2}$ cm

101. Pàgina 187

x: abscissa del punt de tall de la recta amb l'eix *OX*

m: pendent de la recta $\qquad$ *n*: ordenada a l'origen de la recta

Com que r passa pels punts $(2,1)$ i $(x,0)$ obtenim que:

$$m=\frac{1-0}{2-x}=\frac{1}{2-x}$$

$r: y=mx+n \xrightarrow{P(2,1)} 1=2m+n \longrightarrow n=1-2m \longrightarrow n=1-2\cdot\frac{1}{2-x}=\frac{x}{x-2}$

Per tant, la funció que volem minimitzar és: $A(x)=\dfrac{x\cdot\frac{x}{x-2}}{2}=\dfrac{x^2}{2x-4}$

$A'(x)=\dfrac{x^2-4x}{2x^2-8x+8}$ $\qquad A'(x)=0 \longrightarrow x=0,\ x=4$ La solució vàlida és $x=4$.

$A''(x)=\dfrac{(2x-4)(2x^2-8x+8)-(x^2-4x)(4x-8)}{(2x^2-8x+8)^2}=\dfrac{4}{(x-2)^3} \longrightarrow A''(4)=\frac{1}{2}>0$

Així doncs, $m=\dfrac{1}{2-4}=-\dfrac{1}{2}$ y $n=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$.

I la recta que minimitza l'àrea del triangle és: $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

102. Pàgina 187

Un dels vèrtexs es troba sobre la recta $x+2y=2$. Així, els quatre vèrtexs que formen el rectangle tenen la forma:

$O(0,0) \qquad A(x,0) \qquad B\left(0,\dfrac{2-x}{2}\right) \qquad C\left(x,\dfrac{2-x}{2}\right)$

La funció que volem maximitzar és: $f(x)=x\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{2x-x^2}{2}$

$f'(x)=1-x \qquad f'(x)=0 \longrightarrow x=1$

$f''(x)=-1 \longrightarrow f''(1)=-1<0 \longrightarrow$ En $x=1$ presenta el màxim.

Així doncs, els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:

$O(0,0) \qquad A(1,0) \qquad B\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \qquad C\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

I l'àrea d'aquest rectangle és: $f(1)=\dfrac{2\cdot 1-1^2}{2}=\dfrac{1}{2}$ u²

103. Pàgina 187

Els punts que busquem tenen la forma (x, x^2).

La distància entre aquests punts i $(0, 1)$ està determinada per: $D(x)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

$D'(x)=\dfrac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$ $\qquad$ $D''(x)=\dfrac{2x^6-3x^4+6x^2-1}{\sqrt{(x^4-x^2+1)^3}}$

$D'(x)=0 \rightarrow x(2x^2-1)=0 \rightarrow x=0,\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Les tres soluciones són vàlides. Així:

$D''(0)=-\dfrac{1}{1}=-1<0 \rightarrow$ En $x=0$ no hi ha un mínim.

$D''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hi ha un mínim. $D''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hi ha un mínim.

Així doncs, els punts de distància mínima són: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ i $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

I aquesta distància és: $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ u

104. Pàgina 187

El vèrtex (a, b) es troba sobre la corba $y=\dfrac{1}{x^2}+4$.

Així, els quatre vèrtexs que formen el rectangle tenen la forma:

$$O(0,0) \qquad A(a,0) \qquad B\left(0,\frac{1}{a^2}+4\right) \qquad C\left(a,\frac{1}{a^2}+4\right)$$

La funció que volem minimitzar és $f(a)=a\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+4\right)=\dfrac{1}{a}+4a$.

$f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}+4$ $\qquad$ $f'(a)=0 \rightarrow 4a^2=1 \rightarrow a=\pm\dfrac{1}{2}$

La solució vàlida és $a=\dfrac{1}{2}$ perquè a ha de ser positiu.

$f''(a)=\dfrac{2}{a^3} \rightarrow f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=16>0 \rightarrow$ En $a=\dfrac{1}{2}$ hi ha el mínim.

Així doncs, els vèrtexs del rectangle són:

$$O(0,0) \qquad A\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad B(0,8) \qquad C\left(\frac{1}{2},8\right)$$

I l'àrea d'aquest rectangle és: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\dfrac{4}{2}=4$ u²

105. Pàgina 187

La funció de l'enunciat representa una paràbola amb el vèrtex a l'eix *Y*, per tant hi haurà dues solucions simètriques respecte d'aquest eix, una en el primer quadrant i l'altra en el segon. Considerem $(a, 4-a^2)$ un punt de la paràbola del primer quadrant.

$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow$ L'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $(a, 4 - a^2)$ és:
$y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$

Els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos són: $(0, a^2 + 4)$ i $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$

L'àrea del triangle que es forma amb aquests punts i el punt (0, 0) és: $A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a}(a^2+4) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$, que és la funció que hem d'optimitzar.

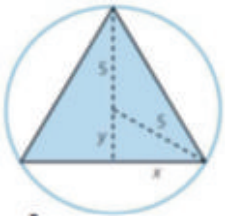
$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ és la solució del primer quadrant.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ la tangent forma amb els eixos un triangle d'àrea mínima.

106. Pàgina 187



Anomenem x la meitat de la base del triangle, i $y + 5$, l'altura. Es verifica que: $x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La funció que hem d'optimitzar està determinada per:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0 \rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5, y = \frac{5}{2}$$

La solució vàlida és la solució positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

Així, en $y = \frac{5}{2}$ s'aconsegueix un màxim.

Per tant, les dimensions del triangle d'àrea més gran són:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ cm

107. Pàgina 187

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1.850x + 25.000) = -10x^2 + 1.900x - 25.000$

c) $B'(x) = -20x + 1.900 = 0 \rightarrow x = \frac{1.900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ s'aconsegueix un màxim.

$B(95) = -90.250 + 180.500 - 25.000 = 62.250$

Així doncs, per maximitzar el benefici han de vendre les 95 joguines. El benefici puja a 65.250 €.

108. Pàgina 187

$$B'(x) = \frac{-x^2 + 16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$B''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

- $B''(-4) > 0 \rightarrow$ En $x = -4$ s'aconsegueix un mínim.
- $B''(4) < 0 \rightarrow$ En $x = 4$ s'aconsegueix un màxim.

$$B(4) = \frac{-16 + 36 - 16}{4} = 1$$

Així doncs, per obtenir el benefici màxim han de vendre 4 articles. El benefici és de 1.000 €.

109. Pàgina 187

x: catet 1 del triangle

y: catet 2 del triangle

Es verifica que $20^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{400 - y^2}$

La funció que volem maximitzar és:

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \rightarrow A(x) = \frac{x \cdot \left(\sqrt{400 - y^2}\right)}{2}$$

$$\frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{400 - x^2}}{\sqrt{400 - x^2}} \qquad A'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$$

La solució vàlida és $x = 10\sqrt{2}$. Així, el valor dels dos catets per tal que l'àrea del jardí sigui màxima són:

Catet 1 = $\left(10\sqrt{2}\right)^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2$ Catet 2 = $\sqrt{400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2} = 10\sqrt{2}$

110. Pàgina 187

Anomenem x, y, z els nombres que busquem.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ x + 2y + 3z = 200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 100 - y - z \\ x = 200 - 2y - 3z \end{array}\right\} \rightarrow 100 - y - z = 200 - 2y - 3z \rightarrow y = 100 - 2z$$

Per tant, resulta: $x = 100 - (100 - 2z) - z = 2z - z = z$

$P(x,y,z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100-2z)z = 100z^2 - 2z^3$

$P'(z) = 200z - 6z^3 = z(200-6z) = 0 \rightarrow z = 0, z = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$

$P''(z) = 200 - 12z \rightarrow P''\left(\frac{100}{3}\right) < 0 \rightarrow$ En $z = \frac{100}{3}$ s'aconsegueix el màxim.

Així doncs, tenim: $x = \frac{100}{3}$, $y = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}$, $z = \frac{100}{3}$

111. Pàgina 188

$C(t) = (t-a)^2 + b,\ 9 \le t \le 14$

$C'(t) = 2(t-a)$

$C(t)$ té un mínim en $t = 12 \longrightarrow 2(12-a) = 0$

$C(12) = 15 \longrightarrow (12-a)^2 + b = 15$

Resolem el sistema d'equacions següent i obtenim els paràmetres que busquem:

$$\begin{cases} -2a + 24 = 0 \\ (12-a)^2 + b = 15 \end{cases} \longrightarrow a = 12,\ b = 15$$

112. Pàgina 188

a) $C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t,\ 1 \le t \le 6$

$C'(t) = 24t^2 - 168t + 240$ $\quad C'(t) = 0 \longrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \longrightarrow t = 2,\ t = 5$

$C''(t) = 48t - 168$ $\quad C''(2) = 96 - 168 < 0$ i $C''(5) = 240 - 168 > 0$

És a dir:

En $t = 2$ hi ha el màxim de $C(t)$ amb valor $C(2) = 208$.

En $t = 5$ hi ha el màxim de $C(t)$ amb valor $C(5) = 100$.

b) Com que l'equació determina la despesa d'energia en calefacció, el més natural seria que reflectís una despesa més alta durant els mesos d'hivern i una despesa més baixa en els mesos propers a l'estiu, tal com passa efectivament. És per això que el màxim s'aconsegueix al febrer, i el mínim, al maig.

$C(t)$ és creixent en $(1, 2) \cup (5, 6)$ i decreixent en $(2, 5)$.

113. Pàgina 188

a) $R(t) = A \cdot t \cdot (B - t),\ 0 < t \le 20$

$R'(t) = A(B-t) - At$

Màxim rendiment per a $t = 10 \longrightarrow A(B-10) - 10A = 0$

$R(10) = 100 \longrightarrow 10A(B-10) = 100$

Els valors de A i B estan determinats pel sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} A(B-20) = 0 \\ 10A(B-10) = 100 \end{cases} \longrightarrow A = 1,\ B = 20$$

És a dir: $R(t) = t(20-t)$

b) $R(t) = 64 \longrightarrow 64 = 20t - t^2 \qquad -t^2 + 20t - 64 = 0 \longrightarrow t = 4,\ t = 16$

S'aconsegueix un rendiment del 64 % per a $t = 4$ i $t = 16$.

Aquests valors tenen sentit, ja que tots dos es troben a la mateixa distància (6 hores) del màxim del rendiment, que s'aconseguia per a $t = 10$.

114. Pàgina 188

a) Les despeses inicials es corresponen amb $G(0)$, i tenen un valor de $G(0) = 100$.

Aquest valor representa la inversió inicial que ha de fer l'empresa per començar l'activitat comercial.

b) $B(t) = I(t) - G(t) \longrightarrow B(t) = -2t^2 + 50t - (t^2 - 16t + 100) = -3t^2 + 66t - 100$

La funció dels beneficis és: $B(t) = -3t^2 + 66t - 100$

c) $B'(t) = -6t + 66 \qquad B'(t) = 0 \longrightarrow t = 11 \qquad B''(11) = -6 < 0 \rightarrow t = 11$ és màxim.

Els beneficis són màxims per a $t = 11$, l'onzè any des que es va fundar.

Els beneficis totals aquell any van ser de: $B(11) = -3 \cdot 11^2 + 66 \cdot 11 - 100 = 263$ milers d'euros

115. Pàgina 188

Sou: $1.000 + 17x - 0{,}0025x^3$ Despesa: $200 + 5x$

Guany: $G(x) = 1.000 + 17x - 0{,}0025x^3 - 200 - 5x = -0{,}0025x^3 + 12x + 800$

$G'(x) = -0{,}0075x^2 + 12 = 0 \longrightarrow x^2 = \dfrac{12}{0{,}0075} = 1.600 \rightarrow x = \pm 40$

$G''(x) = -0{,}015x \longrightarrow G''(40) < 0 \longrightarrow$ Perquè el guany sigui màxim ha de contractar mensualment 40 pòlisses.

$G(40) = 1.120 \longrightarrow$ El guany que obtindrà és de 1.120 €.

116. Pàgina 188

A la banyera entren $10 \cdot 9{,}6 = 96$ litres d'aigua.

Omplir la banyera costa $96 \cdot 0{,}01 = 0{,}96$ €.

Si x és la quantitat de minuts que l'aixeta de la dutxa està oberta, la funció de la despesa està determinada per: $G(x) = 12 \cdot 0{,}008x = 0{,}096x$

El màxim d'aquesta funció ha de ser més petit que 0,96.

$G(x) = 0{,}0096x < 0{,}96 \rightarrow x < \dfrac{0{,}96}{0{,}0096} \rightarrow x < 100$

Els costos de la dutxa i del bany s'igualarien als 100 minuts.

117. Pàgina 188

a) $N'(t) = 80 - 20t = 0 \longrightarrow t = 4$

$N''(t) = -20 < 0 \longrightarrow$ Per a $t = 4$ s'aconsegueix un màxim.

$N(4) = 320 - 160 = 160$

Així doncs, el nombre de clients és màxim al cap de 4 hores d'oberta la discoteca.

b) Com a màxim hi ha 160 clients.

c) La discoteca tancarà quan no hi quedi cap client.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t(80 - 10t) = 0 \rightarrow t = 0,\ t = 8$

La discoteca tancarà al cap de 8 hores d'haver obert, és a dir, a les 6 de la matinada.

118. Pàgina 188

a) En $x = 6$ la funció és contínua: $f(6) = f(6^-) = 0$ $\qquad f(6^+) = 15 - 15 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -10x + 40 & 0 < x < 6 \\ \dfrac{5}{2} & 6 < x < 10 \end{cases}$$

- En (0, 6) $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -10x + 40 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ és creixent} \\ \text{En } (4, 6) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ és decreixent} \end{cases}$
- En (6, 10) $\rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ és creixent.

$f(0) = -60 \qquad f(4) = 20 \qquad f(6) = 0 \qquad f(10) = 10$

$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = 6$

Així doncs, la funció és negativa en (0, 2) i és positiva en (2, 6). També és positiva en (6, 10).

Per tant, l'empresa no tindrà pèrdues a partir d'una despesa en publicitat de 2.000 €.

b) La despesa en publicitat que produeix el benefici màxim és de 4.000 €.

c) El benefici màxim és de 20.000 €.

119. Pàgina 189

a) $R'(t) = \dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{1.000}t \qquad R'(t) = 0 \rightarrow t = 5$

$R''(t) = -\dfrac{2}{1.000} < 0 \qquad R''(5) < 0 \rightarrow t = 5$ és un màxim.

La rendibilitat $R(t)$ serà màxima per a $t = 5$ anys.

b) $R(5) = 3 + \dfrac{1}{100} \cdot 5 + \dfrac{1}{1.000} \cdot 5^2 = 3 + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{40} = 3{,}025\%$

120. Pàgina 189

x: llargada de l'escenari $\qquad y$: amplada de l'escenari

$A_{\text{Escenari}} = 100 \rightarrow xy = 100 \rightarrow y = \dfrac{100}{x}$

La funció que hem de minimitzar és: $P(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$

$P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} \qquad P'(x) = 0 \rightarrow 2 = \dfrac{200}{x^2} \rightarrow x = \pm 10$ La solució vàlida és $x = 10$.

$P''(x) = \dfrac{400}{x^3} \rightarrow P''(10) > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ s'aconsegueix el mínim.

Així doncs, les dimensions que ha de tenir l'escenari per complir les especificacions que es demanen són:

Llargada = 10 m $\qquad$ Amplada = 10 m

És a dir, l'escenari ha de tenir forma quadrada.

121. Pàgina 189

x: longitud dels costats iguals de tela metàl·lica

y: longitud del costat de tela metàl·lica de la mateixa mida que la paret

Com que disposem de 1.000 m de tela metàl·lica:

$$2x + y = 1.000 \rightarrow y = 1.000 - 2x$$

La funció que volem maximitzar és:

$$A(x) = x(1.000 - 2x) = 1.000x - 2x^2$$

$A'(x) = 1.000 - 4x$ $\qquad$ $A'(x) = 0 \rightarrow 1.000 = 4x \rightarrow x = 250$

$A''(250) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 250$ s'aconsegueix el màxim.

Així doncs, la tanca estarà constituïda per la paret i per tres tanques metàl·liques de 250 m, 250 m i 500 m de longitud.

Àrea: $250 \cdot 500 = 125.000$ m^2

122. Pàgina 189

x: llargada de la barra en metres $\qquad$ *y*: amplada de la barra en metres

$P = 2(x + y) = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow x = 15 - y$

$A_{\text{interor}} = (y - 1) \cdot (x - 1) = (y - 1) \cdot (14 - y)$

$A'_{\text{interior}} = 15 - 2y \qquad A'_{\text{interior}} = 0 \rightarrow 15 - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{15}{2}$

Així doncs, la barra ha de ser de forma quadrada, amb els costats de $\frac{15}{2}$ m.

123. Pàgina 189

x: nombre d'alarmes de tipus *A* $\qquad$ *y*: nombre d'alarmes de tipus *B*

Com que instal·laran 9 alarmes, tenim que $x + y = 9 \rightarrow y = 9 - x$.

La funció que volem maximitzar és:

$$S(x, y) = \frac{xy^2}{10} \rightarrow S(x) = \frac{x(9-x)^2}{10}$$

$S'(x) = \frac{(9-x)^2 - 2x(9-x)}{10} = \frac{3x^2 - 36x + 81}{10} \qquad S'(x) = 0 \rightarrow x = 3, x = 9$

$S''(x) = \frac{3x - 18}{5} \rightarrow S''(3) < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ s'aconsegueix un màxim.

$\rightarrow S''(9) > 0 \rightarrow$ En $x = 9$ s'aconsegueix un mínim.

Així doncs, la seguretat serà màxima quan instal·lin 3 alarmes de tipus *A* i 6 alarmes de tipus *B*.

124. Pàgina 189

Angle de 90º $\longrightarrow b^2 = 2c^2 \longrightarrow c = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

$2a + b + 2c = 6$

Perímetre = 6 m $\longrightarrow 2a + b + 2c = 6$

$\longrightarrow 2a + b(1+\sqrt{2}) = 6 \longrightarrow a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

h : altura del triangle

Pel teorema de l'altura: $h^2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \longrightarrow h = \frac{b}{2}$

Perquè hi hagi més lluminositat, l'àrea de la finestra ha de ser màxima. És a dir, la funció que volem optimitzar és:

$$A(a, b, h) = a \cdot b + \frac{b \cdot h}{2} \longrightarrow A(b) = \frac{6 - b \cdot (1+\sqrt{2})}{2} \cdot b + \frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{12b - b^2(1+2\sqrt{2})}{4}$$

$A'(b) = 3 - \frac{b}{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)$ $\qquad A'(b) = 0 \longrightarrow b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$

$A''(b) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0 \longrightarrow b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ és el màxim.

Així doncs, les dimensiones de la finestra han de ser:

$$a = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7} \text{ m} \qquad b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \text{ m} \qquad c = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7} \text{ m}$$

125. Pàgina 189

x: altura de la finestra $\qquad$ y: amplada de la finestra

Àrea = 1 m^2 $\longrightarrow xy = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{x}$

La funció que volem minimitzar és: $P(x) = 2(x + \frac{1}{x})$

$P'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad P'(x) = 0 \longrightarrow 1 = \frac{1}{x^2} \longrightarrow x = \pm 1$ La solució vàlida és $x = 1$.

$P''(x) = \frac{4}{x^3} \longrightarrow P''(1) > 0 \longrightarrow$ En $x = 1$ s'aconsegueix el mínim.

Així doncs, la finestra ha de ser un quadrat d'1 m de costat perquè es minimitzi el cost del marc.

126. Pàgina 189

r: radi de la base $\qquad$ h: altura de la llauna

Volum = 10 dm^3 $\longrightarrow \pi r^2 h = 10 \longrightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

La funció que volem minimitzar és: $A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h \xrightarrow{h = \frac{10}{\pi r^2}} A(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$

$A'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2}$ $\qquad$ $A'(r) = 0 \rightarrow \pi r^3 = 10 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

$A''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} \rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ s'aconsegueix el mínim.

$$h = \frac{10}{\pi r^2} \xrightarrow{r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} h = \frac{10}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2} \xrightarrow{\text{Racionalitzem}} h = \frac{10}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Així doncs, les dimensions de la llauna han de ser:

$r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm $\qquad$ $h = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm

127. Pàgina 189

x: costat de la base $\qquad$ *h*: altura del dipòsit

Volum = 20 m^3 $\rightarrow x^2 h = 20 \rightarrow h = \frac{20}{x^2}$

La funció que volem minimitzar és:

$$C(x,h) = 4xh + 2x^2 \xrightarrow{h=\frac{20}{x^2}} C(x) = \frac{80}{x} + 2x^2$$

$C'(x) = -\frac{80}{x^2} + 4x$ $\qquad$ $C'(x) = 0 \rightarrow x^3 = 20 \rightarrow x = \sqrt[3]{20}$

$C''(x) = \frac{160}{x^3} + 4 \rightarrow C''(\sqrt[3]{20}) = \frac{160}{20} + 4 = 12 > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt[3]{20}$ s'aconsegueix el mínim.

Així doncs, les dimensions han de ser:

$x = \sqrt[3]{20}$ m $\qquad$ $h = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{20}\right)^2} = \sqrt[3]{20}$ m

I el cost mínim és: $C\left(\sqrt[3]{20}\right) = \frac{80}{\sqrt[3]{20}} + 2\left(\sqrt[3]{20}\right)^2 = \frac{120}{\sqrt[3]{20}} = 12\sqrt[3]{50}$ €

128. Pàgina 189

r: radi de les semiesferes i del cilindre $\qquad$ *h*: altura de la zona cilíndrica

Volum = $10\pi \rightarrow \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi \rightarrow h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r$

La funció que volem minimitzar és:

$$C(r,h) = 20 \cdot 4\pi r^2 + 10 \cdot 2\pi r h = 80\pi r^2 + 20\pi r\left(\frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r\right)$$

$C'(r) = \frac{320\pi r}{3} - \frac{200\pi}{r^2}$ $\qquad$ $C'(r) = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}}$

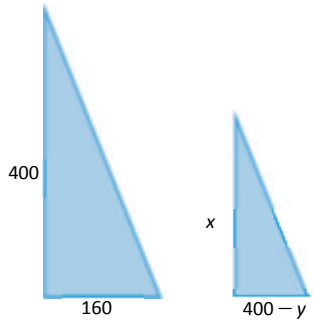
$C''(r) = \frac{160 \cdot 2}{3}\pi + \frac{400\pi}{r^3}$ $\qquad$ $C''\left(\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\right) > 0$

Així doncs, en $r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$ m s'aconsegueix un mínim.

Les dimensions que minimitzen el cost són:

$$r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\text{ m} \quad h=2\sqrt[3]{15}\text{ m}$$

129. Pàgina 189



x: altura en metres del camp per a blat de moro

y: amplada en metres del camp per a blat de moro

Pel teorema de Tales:

$$\frac{400}{160}=\frac{x}{400-y}\rightarrow y=\frac{2.000-2x}{5}$$

La funció que volem maximitzar és:

$$B(x,y)=0{,}12xy+0{,}10\cdot 240\cdot(400-x)\xrightarrow{y=\frac{2.000-2x}{5}}B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9.600$$

$$B'(x)=24-\frac{12}{125}x^2 \qquad B'(x)=0\rightarrow x=250$$

$$B''(x)=-\frac{12}{125} \qquad B''(250)=-\frac{12}{125}<0$$

Així doncs, en $x=250$ m s'aconsegueix el màxim.

Per tant, el camp de blat de moro ha de ser de 250 m d'altura per 300 m d'amplada, i el camp de blat, de 150 m d'altura per 240 m d'amplada.

El benefici màxim és:

$$B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9.600\xrightarrow{x=250}B(250)=12.600\,€$$

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

1. Pàgina 190

Superfície de la llauna perfecta: $S_{\text{perfecta}} = 2\pi \cdot 3{,}75 \cdot 7{,}5 + 2\pi \cdot 3{,}75^2 = 265{,}07\ \text{cm}^2$

Superfície de la llauna habitual: $S_{\text{habtiual}} = 2\pi \cdot 3{,}25 \cdot 11{,}5 + 2\pi \cdot 3{,}25^2 = 301{,}20\ \text{cm}^2$

$S_{\text{habtiual}} - S_{\text{perfecta}} = 36{,}13\ \text{cm}^2$

2. Pàgina 190

No hi pot haver altres mides per a llaunes cilíndriques. Les úniques dimensions que minimitzen la superfície són les que hem calculat abans.

3. Pàgina 190

Depèn de la llauna. Caldria comprovar-ho tenint en compte els diferents tipus de llaunes que trobem al mercat.

4. Pàgina 190

Cost per llauna:

$$C_{\text{perfecta}} = \frac{265{,}07 \cdot 50}{10.000} = 1{,}325 \text{ ct.}$$

$$C_{\text{habitual}} = \frac{301{,}20 \cdot 50}{10.000} = 1{,}506 \text{ ct.}$$