Aplicacions de la derivada

8

ACTIVITATS

1. Pàgina 170

a) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6(1+h)^2+1-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h^2-12h+6-6}{h}=\lim_{h\to 0}(6h-12)=-12$

El pendent de la recta tangent és: –12

b) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$

El pendent de la recta tangent és: 3

2. Pàgina 170

a) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$

El pendent de la recta tangent és: $\frac{1}{2}$

b) $f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$

El pendent de la recta tangent és: $\frac{1}{4}$

3. Pàgina 171

$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+3-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h}==\lim_{h\to 0}(-2+h)=-2$

L'equació de la recta tangent és: $y-4=-2(x+1)\longrightarrow y=-2x+2$

L'equació de la recta normal és: $y-4=\frac{1}{2}(x+1)\longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

4. Pàgina 171

$f(1)=5$

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^3+3-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^3+6h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h^2+6h+6)=6$

L'equació de la recta tangent és: $y-5=6(x-1)\longrightarrow y=6x-1$

$f(-1)=1$

$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^3+3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^3+6h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h^2+6h+6)=6$

L'equació de la recta tangent és: $y-1=6(x-1)\longrightarrow y=6x+7$

Les rectes són paral·leles a la recta $y=6x$, perquè el seu pendent és 6.

5. Pàgina 172

a) $f(x)=-x^2+3x$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x+3$ $f'(x)=0\rightarrow x=\frac{3}{2}$

Donem valors a l'esquerra i a la dreta de $x=\frac{3}{2}$:

$f'(1)=1>0 \rightarrow f(x)$ creixent a l'esquerra de $x=\frac{3}{2}$

$f'(2)=-1<0 \rightarrow f(x)$ decreixent a la dreta de $x=\frac{3}{2}$

Així doncs, $f(x)$ és creixent en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ i decreixent en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x)=\frac{3}{x-2}$ $\text{Dom} f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

$f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)$ té asímptota vertical en $x=2$.

$f'(0)=-\frac{3}{4}<0$ $f'(3)=-3<0$

Així doncs, $f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$.

6. Pàgina 172

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Cas $x\leq 1$:

$f(x)=2-x^2$ $f'(x)=-2x$ $f'(x)=0\rightarrow x=0$

Estudiem $f'(x)$ a l'esquerra i a la dreta del punt $x=0$:

$f'(-1)=2>0$ $f'(1)=-2<0$

És a dir, $f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)$ i decreixent en $(0, 1)$.

Cas $x>1$:

$f(x)=x^2-6x+8$ $f'(x)=2x-6$ $f'(x)=0\rightarrow x=3$

Estudiem $f'(x)$ a l'esquerra i a la dreta del punt $x=3$:

$f'(2)=-2<0$ $f'(4)=2>0$

És a dir, $f(x)$ és decreixent en $(1,3)$ i creixent en $(3, +\infty)$.

Així doncs, $f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$ i decreixent en $(0, 1)\cup(1, 3)$.

7. Pàgina 173

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$ $f'(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm 1$

Estudiem $f'(x)$ al voltant dels punts $x=-1$, $x=0$ i $x=+1$.

$f'(-2)=-24<0$ $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{2}>0$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{2}<0$ $f'(2)=24>0$

Així doncs, $f(x)$ és decreixent en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ i creixent en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ $f'(x)=0\rightarrow x=0$

Estudiem un punt a l'esquerra del 0 i un altre a la dreta.

$f'(-2)=-\dfrac{8}{25}<0$ $f'(2)=\dfrac{8}{25}>0$

Així doncs, $f(x)$ és decreixent en l'interval $(-\infty,0)$ i creixent en l'interval $(0,+\infty)$.

8. Pàgina 173

$f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ $\rightarrow$ Hi ha asímptotes verticals en $x=1$ i $x=-1$.

$f'(x)=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ $\rightarrow f'(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$f'(-2)=-\dfrac{4}{9}<0$ $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{25}>0$ $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{9}>0$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{9}>0$ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{25}>0$ $f'(2)=-\dfrac{4}{9}<0$

En $x=-\sqrt{3}$ presenta el mínim relatiu, i en $x=\sqrt{3}$, el màxim relatiu.

Les coordenades dels punts en els quals s'aconsegueixen aquests valors són:

$$\left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

9. Pàgina 174

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{x^4}$ $f'(x)=0\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2-6)}{x^5}$ $f''(-\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(-\sqrt{3})^5}=\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}>0$ i $f''(\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(\sqrt{3})^5}=-\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}<0$

És a dir, en $x=\sqrt{3}$ té un màxim relatiu, i en $x=-\sqrt{3}$, un mínim relatiu.

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6+2}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-\dfrac{4x(x^6-1)}{(x^6+2)^2}$ $f'(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm 1$

$f''(x)=\dfrac{4(5x^{12}-25x^6+2)}{(x^6+2)^3}$

$f''(-1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$ $f''(0)=1>0$ $f''(1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$

És a dir, en $x=0$ té un mínim relatiu de $f(x)$, i en $x=-1$ i $x=1$, els màxims relatius.

10. Pàgina 174

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-3,0,2\}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^3-10x^2-6x+18}{x^2(x^2+x-6)^2}=-\dfrac{2(x-1)}{(x-2)^2x^2}$ $f'(x)=0\rightarrow x=1$

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-6x+4)}{(x-2)^3x^3}\longrightarrow f''(1)=-2<0$

És a dir, $f(x)$ presenta el màxim relatiu en $x=1$.

11. Pàgina 175

a) $f(x)=7x^3-x^2-x+2$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=21x^2-2x-1$

$f''(x)=42x-2$ $f''(x)=0\rightarrow x=\dfrac{1}{21}$

$f''(0)=-2<0$ $f''(1)=40>0$

Així doncs, $f(x)$ és convexa en $\left(-\infty,\dfrac{1}{21}\right)$ i còncava en $\left(\dfrac{1}{21},+\infty\right)$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ $g''(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$g''(-2)>0$ $g''(-1)<0$ $g''(1)>0$ $g''(2)<0$

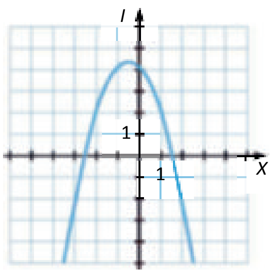
Així doncs, $g(x)$ és còncava en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ i convexa en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

12. Pàgina 175

a) $f(x)=-x^2-x+4$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x-1$ $f''(x)=-2<0$

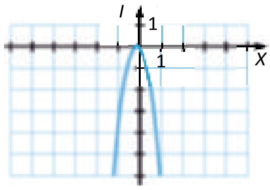
Així doncs, $f(x)$ és convexa en $\forall x\in\mathbb{R}$.



b) $g(x) = -x - 5x^2$ Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = -1 - 10x$ $g''(x) = -10 < 0$

És a dir, $g(x)$ és convexa en $\forall x \in \mathbb{R}$.



13. Pàgina 176

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $f''(x) = 6x + 6$ $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(-2) = -6 < 0$ $f''(0) = 6 > 0$

Així doncs:

$f(x)$ és convexa en $(-\infty, -1)$ i còncava en $(-1, +\infty)$.

$f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = -1$.

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 7x}$ Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{-7, 0\}$

$g'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 7}{(x+7)^2 x^2}$ $g''(x) = \dfrac{2(x^3 - 3x^2 - 21x - 49)}{(x+7)^3 x^3}$

$g''(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 21x - 49 = 0 \rightarrow x = 7$

$g''(-8) < 0$ $g''(-6) > 0$ $g''(6) < 0$ $g''(8) > 0$

Així doncs:

$g(x)$ és convexa en $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$ i còncava en $(-7, 0) \cup (7, +\infty)$.

$g(x)$ té un punt d'inflexió en $x = 7$.

14. Pàgina 176

$f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$ $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -\dfrac{a}{3}$

Com que hi ha un punt d'inflexió en $x = 1 \rightarrow -\dfrac{a}{3} = 1 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Estudiem punts a l'esquerra i a la dreta de $x = 1$:

$f''(0) = -6 < 0$ $f''(2) = 6 > 0$

És a dir:

$f(x)$ és còncava en $(-\infty, 1)$ i convexa en $(1, +\infty)$.

Les coordenades del punt d'inflexió són $(1, f(1)) = (1, 1)$.

15. Pàgina 177

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3}$ $\quad$ $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{3 - x^2}{2x^4}$ $\quad$ $f''(x) = \frac{x^2 - 6}{x^5}$ $\quad$ $f'''(x) = \frac{30 - 3x^2}{x^6}$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$f'''(-\sqrt{6}) = \frac{30 - 18}{6^3} \neq 0$ $\quad$ $f'''(\sqrt{6}) = \frac{30 - 18}{6^3} \neq 0$

És a dir, $f(x)$ té punts d'inflexió en $x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$.

b) $g(x) = -\frac{x}{x^2 - 7}$ $\quad$ $\text{Dom}\, g(x) = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$

$g'(x) = \frac{x^2 + 7}{(x^2 - 7)^2}$ $\quad$ $g''(x) = -\frac{2x(x^2 + 21)}{(x^2 - 7)^3}$ $\quad$ $g'''(x) = \frac{6(x^4 + 42x^2 + 49)}{(x^2 - 7)^4}$

$g''(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$g'''(0) = \frac{6 \cdot 49}{(-7)^4} \neq 0$

Així doncs, $g(x)$ té un punt d'inflexió en $x = 0$.

16. Pàgina 177

a) $f(x) = 2x^3$ $\quad$ $f'(x) = 6x^2$ $\quad$ $f''(x) = 12x$ $\quad$ $f'''(x) = 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible màxim o mínim

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible punt d'inflexió

$f'''(0) = 6 \neq 0$ $\rightarrow$ L'ordre és imparell $\rightarrow$ $x = 0$ és un punt d'inflexió.

b) $f(x) = -3x^4$

$f'(x) = -12x^3$ $\quad$ $f''(x) = -36x^2$ $\quad$ $f'''(x) = -72x$ $\quad$ $f^{IV)}(x) = -72$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible màxim o mínim

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible punt d'inflexió

$f'''(0) = 0$

$f^{IV)}(0) = -72 \neq 0$ $\rightarrow$ L'ordre és parell i $f^{IV)}(0) < 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ és un màxim relatiu.

c) $f(x) = 6x^5$

$f'(x) = 30x^4$ $\quad$ $f''(x) = 120x^3$ $\quad$ $f'''(x) = 360x^2$ $\quad$ $f^{IV)}(x) = 720x$ $\quad$ $f^{V)}(x) = 720$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible màxim o mínim

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$ $\rightarrow$ Possible punt d'inflexió

$f'''(0) = 0$ $\quad$ $f^{IV)}(0) = 0$

$f^{V)}(0) = 720 \neq 0$ $\rightarrow$ L'ordre és imparell $\rightarrow$ $x = 0$ és un punt d'inflexió.

17. Pàgina 178

$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - x^2 - (x^2 - 12x + 120) = -2x^2 + 72x - 120$

Calculem el màxim de la funció $B(x)$:

$B'(x) = -4x + 72 \qquad B'(x) = 0 \rightarrow x = 18$

$B''(x) = -4 \qquad B''(18) = -4 \rightarrow x = 18$ és un màxim relatiu.

Obtindran el benefici màxim per a una producció de 18 unitats, i aquest benefici màxim és:

$$B(18) = -2 \cdot 18^2 + 72 \cdot 18 - 120 = 528\ €$$

18. Pàgina 178

Busquem el màxim global de la funció concentració $f(t) = 300t(3-t) = 900t - 300t^2$:

$f'(t) = 900 - 600t \qquad f'(t) = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2}$

$f''(t) = -600 \qquad f''\left(\frac{3}{2}\right) = -600 < 0 \rightarrow t = \frac{3}{2}$ és un màxim de $f(t)$.

Obtindrà la màxima concentració en $t = \frac{3}{2}$.

19. Pàgina 179

Definim dos sumands x, y tals que $x + y = 90$.

Volem que aquests sumands minimitzin, a més, l'expressió $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

Reduïm la funció a una sola variable:

$$y = 90 - x \rightarrow f(x) = x^2 + 2(90-x)^2$$

$f'(x) = 6x - 360 \qquad f'(x) = 0 \rightarrow x = 60$

$f''(x) = 6 \qquad f''(60) = 6 > 0 \rightarrow$ En $x = 60$ hi ha un mínim relatiu.

Així, $x = 60$ i $y = 30$ minimitzen la funció $f(x)$.

20. Pàgina 179

l: longitud del costat de la base en cm

h: altura del prisma en cm

$P_{Cara} = 30 \rightarrow 2(l + h) = 30 \rightarrow h = 15 - l$

La funció que volem maximitzar és:

$$V(l,h) = l^2 h \xrightarrow{h=15-l} V(l) = l^2(15-l)$$

$V'(l) = 3l(10-l) \qquad V'(l) = 0 \rightarrow l = 0, l = 10$ La solució vàlida és $l = 10$.

$V''(l) = 30 - 6l \rightarrow V''(10) = -30 < 0 \rightarrow$ En $l = 10$ s'aconsegueix el màxim.

Així doncs, les dimensions que ha de tenir el prisma per complir les condicions que ens demanen són:

$$l = 10 \text{ cm} \qquad h = 5 \text{ cm}$$

SABER FER

21. Pàgina 180

Primer determinem la derivada de la funció: $f'(x) = \ln x + 1$

Després calculem la derivada de la funció en el punt, que és el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt: $f'(e) = \ln e + 1 = 2$

Trobem el valor de la funció en el punt: $f(e) = e \cdot \ln e = e$

Així: $y - e = 2(x - e) \rightarrow y = 2x - e$

22. Pàgina 180

Primer calculem el pendent de les rectes tangents. Com que són paral·leles a la bisectriu del primer quadrant, formen un angle de 45º:

$$m = tg\,45° \rightarrow m = 1$$

Després trobem la derivada de la funció: $f'(x) = 9x^2$

A continuació, determinem la derivada de la funció en el punt:

$$f'(a) = 9a^2 \;\longrightarrow\; 9a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$

I finalment, calculem els punts $(a, f(a)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{19}{9}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{9}\right) \end{cases}$

23. Pàgina 180

Primer, calculem la derivada de $f(x) = ax^3 + bx + c$:

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Després, plantegem i resolem el sistema que es forma amb les condicions que ens donen:

- L'ordenada a l'origen és 1 $\longrightarrow$ $f(0) = 1$
- Passa pel punt (–1, 3) $\longrightarrow$ $f(-1) = 3$
- Té un punt extrem relatiu en (–1, 3) $\longrightarrow$ $f'(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c = 1 \\ -a - b + c = 3 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1, b = -3, c = 1$$

L'expressió algebraica és $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Estudiem si en $x = -1$ s'aconsegueix un màxim o un mínim relatiu:

$f''(x) = 6x \;\longrightarrow\; f''(-1) = -6 < 0 \;\longrightarrow$ Es tracta d'un màxim.

24. Pàgina 181

$f(x)=ax^4-3x^3+2x^2-x$ $\quad f'(x)=4ax^3-9x^2+4x-1$ $\quad f''(x)=12ax^2-18x+4$

Busquem a tal que $f''(x)$ no tingui arrels reals:

$$f''(x)=12ax^2-18x+4\neq 0 \rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 12a\cdot 4}}{24a} \rightarrow 324-192a<0 \rightarrow a>\frac{27}{16}$$

$f''(0)=4$ $\rightarrow$ La funció és còncava en tots els punts quan $a>\frac{27}{16}$.

25. Pàgina 182

Estudiem el signe de $f'(x)$ amb la monotonia de $f(x)$:

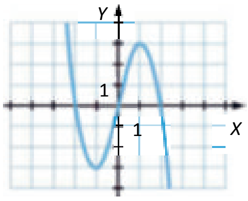
- $f(x)$ és creixent en $(-3,-2)\cup(0,2)$ $\rightarrow$ $f'(x)>0$
- $f(x)$ és decreixent en $(-2,0)\cup(2,3)$ $\rightarrow$ $f'(x)<0$
- $f(x)$ té màxims en $x=-2, x=2$ $\rightarrow$ $f'(-2)=f'(2)=0$
- $f(x)$ té un mínim en $x=0$ $\rightarrow$ $f'(0)=0$

Estudiem la concavitat i els punts d'inflexió:

- $f(x)$ és convexa en $(-3,-1)\cup(1,3)$ i còncava en $(-1,1)$.
- $f(x)$ té punts d'inflexió en $x=-1, x=1$.

A més, $f''(-1)=f''(1)=0$ $\rightarrow$ $f'(x)$ té extrems relatius en $x=-1, x=1$.

Representem $f'(x)$ amb la informació que hem obtingut:



26. Pàgina 182

Considerem x i y els catets del triangle rectangle. Pel teorema de Pitàgores, $5^2=x^2+y^2 \rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$.

La funció que volem maximitzar és:

$$A(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\xrightarrow{y=\sqrt{25-x^2}}A(x)=\frac{x\cdot\sqrt{25-x^2}}{2}$$

$A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$ $\quad A'(x)=0 \rightarrow 2x^2=25 \rightarrow x=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow$ La solució vàlida és $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

$A''(x)=\frac{x\cdot(2x^2-75)}{2(25-x^2)^{3/2}} \rightarrow A''\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot(25-75)}{2\cdot\left(\frac{25}{2}\right)^{3/2}}<0 \rightarrow$ En $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ s'aconsegueix el màxim.

Així doncs, els catets del triangle han de fer: $\quad x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ m $\quad y=\frac{5}{\sqrt{2}}$ m

27. Pàgina 183

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+4 & \text{si } 0<x\le 2\\ -\frac{3}{4}x^2+6x-6 & \text{si } 2<x\le 6\\ \frac{1}{6}x+2 & \text{si } 6<x\le 12\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{si } 0<x<2\\ -\frac{3}{2}x+6 & \text{si } 2<x<6\\ \frac{1}{6} & \text{si } 6<x<12\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -\frac{3}{2}x+6=0 \rightarrow x=4$$

Analitzem si $x=4$ és l'abscissa d'un màxim o d'un mínim:

$f''(x)=-\frac{3}{2}$ si $2<x<6$ $\rightarrow f''(4)=-\frac{3}{2}<0$ $\rightarrow$ Es tracta d'un màxim.

Calculem el valor de $f(x)$ en els extrems de cada interval i també en $x=4$:

$f(0)=4,\ f(2)=3,\ f(6)=3,\ f(12)=4,\ f(4)=6$

Així doncs:

Hi ha un màxim, que s'aconsegueix en el quart mes, amb un benefici de 6.000 €.

Hi ha dos mínims, que es presenten en els mesos segon i sisè, amb un benefici de 3.000 € cada un.

28. Pàgina 183

Determinem la funció que optimitzarem.

$n \rightarrow$ nre. d'unitats de l'article que es produeixen

$C(n) = 2n^3 + 270n + 2.048 \rightarrow$ cost de producció de n unitats

La funció que determina el cost de producció és: $f(n)=\frac{2n^3+270n+2.048}{n}$

Trobem la derivada de la funció que optimitzarem:

$$f'(n)=\frac{(6n^2+270)n-(2n^3+270n+2.048)}{n^2}=\frac{4n^3-2.048}{n^2}$$

Igualem la derivada a 0 per determinar els possibles màxims o mínims.

$$f'(n)=0 \rightarrow \frac{4n^3-2.048}{n^2}=0 \rightarrow n=8$$

Estudiem el signe de $f'(n)$ per verificar si es tracta d'un màxim o d'un mínim.

Si $n < 8 \rightarrow f'(n) < 0 \rightarrow f$ decreix

Si $n > 8 \rightarrow f'(n) > 0 \rightarrow f$ creix

Per tant, $n = 8$ és un mínim.

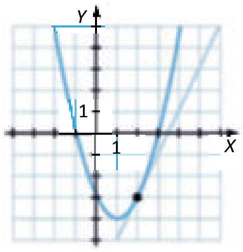
N'han de produir 8 unitats perquè el cost sigui mínim.

ACTIVITATS

29. Pàgina 184

$f(2) = -3$ $\qquad f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2$

L'equació de la recta tangent és: $y + 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 7$



30. Pàgina 184

$f(1) = 1 - a + 6 = 2 \rightarrow a = 5$

$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

L'equació de la recta tangent és: $y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 5$

31. Pàgina 184

a) $f(-1) = -1$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

L'equació de la recta tangent és: $y + 1 = -\dfrac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

b) $f(0) = \ln 1 = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{3}{3x + 1} \rightarrow f'(0) = 3$

L'equació de la recta tangent és: $y = 3x$

c) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ $\qquad f'(x) = -\sin x \rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

L'equació de la recta tangent és: $y - 2 = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -x + \dfrac{\pi + 4}{2}$

d) $f(1) = 2$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}} \rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

L'equació de la recta tangent és: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

32. Pàgina 184

$f(-1) = \ln 1 = 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x + 3} \rightarrow f'(-1) = 1$

L'equació de la recta tangent és: $y = x + 1$

L'equació de la recta normal és: $y = -x - 1$

33. Pàgina 184

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^0-3=-2$

$f'(x)=4e^{4x+2}\rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

L'equació de la recta tangent és: $y+2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\rightarrow y=4x$

34. Pàgina 184

$\frac{x-2}{x+1}=0\rightarrow x=2$ és el punt de tall de f amb l'eix d'abscisses.

$f(2)=0 \qquad f'(x)=\frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}\rightarrow f'(2)=\frac{1}{3}$

L'equació de la recta tangent és: $y=\frac{1}{3}(x-2)\rightarrow y=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

L'equació de la recta normal és: $y=-3(x-2)\rightarrow y=-3x+6$

35. Pàgina 184

$f(3)=\sqrt{4}=2$

$$f'(x)=\frac{2x(4-x)+\left(x^2-5\right)}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}}=\frac{-x^2+8x-5}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}}\rightarrow f'(3)=\frac{10}{4}$$

L'equació de la recta tangent és: $y-2=\frac{10}{4}(x-3)\rightarrow y=\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}$

36. Pàgina 184

$x^3+x^2-6x+1=1\rightarrow x^3+x^2-6x=0\rightarrow x\left(x^2+x-6\right)=0\rightarrow x=0, x=2, x=-3$

Hem de determinar les rectes que passen pel punt (2, 1): $f'(x)=3x^2+2x-6\rightarrow f'(2)=10$

L'equació de la recta tangent és: $y-1=10(x-2)\rightarrow y=10x-19$

L'equació de la recta normal és: $y-1=-\frac{1}{10}(x-2)\rightarrow y=-\frac{1}{10}x+\frac{6}{5}$

37. Pàgina 184

r passa per $A=(1, f(1)=4)$ i $B=(3, f(3)=8)\longrightarrow$ Pendent $=\frac{8-4}{3-1}=2$

$f'(x)=2x-2=2\rightarrow x=2\rightarrow f(2)=5$

L'equació de la recta tangent a la paràbola que és paral·lela a r és: $y-5=2(x-2)\rightarrow y=2x+1$

38. Pàgina 184

$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}\rightarrow\frac{-2}{x^2}=-2\rightarrow x^2=1\rightarrow\begin{cases}x=\ \ 1\\x=-1\end{cases}$$

$f(1)=2$ $y\rightarrow 2=-2+4\rightarrow(1, 2)$ és un punt de la recta.

$f(-1)=2$ $y\rightarrow -2\neq(-2)\cdot(-1)+4\rightarrow(-1, -2)$ no és un punt de la recta.

Així doncs, y pot ser tangent a la funció f en el punt (1, 2).

39. Pàgina 184

r passa per $A=(2, f(2)=0)$ i $B=(e+1, f(e+1)=1)\rightarrow$ Pendent $=\frac{1-0}{e+1-2}=\frac{1}{e-1}$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{e-1}\rightarrow x=e\rightarrow f(e)=\ln(e-1)$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y-\ln(e-1)=\frac{1}{e-1}(x-e)\rightarrow y=\frac{x}{e-1}-\frac{e}{e-1}+\ln(e-1)$$

40. Pàgina 184

a) $f'(x)=2x-2$

Si la recta tangent és paral·lela a la recta donada, aleshores:

$$f'(x)=2x-2=4\rightarrow x=3 \qquad f(3)=3\rightarrow P=(3, 3)$$

Així, l'equació de la recta tangent és:

$$y-3=4(x-3)\rightarrow y=4x-9$$

b) Resolem el sistema que formen la paràbola i la recta:

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\y=4x-9\end{cases}\rightarrow x^2-2x=4x-9\rightarrow x^2-6x+9=0\rightarrow x=3$$

És a dir, tan sols es tallen en un punt.

41. Pàgina 184

$$f'(x)=2x+b\rightarrow f'(1)=2+b$$

La bisectriu del primer quadrant és la recta $y=x$.

Si la recta tangent hi és paral·lela, aleshores: $2+b=1\rightarrow b=-1$

Així, l'equació de la funció té la forma: $y=x^2-x+c$

Si passa pel punt (1, 1) resulta que: $1=1-1+c\rightarrow c=1$

Per tant, l'equació de la paràbola és: $y=x^2-x+1$

42. Pàgina 184

a) La recta tangent forma un angle de 45º amb l'eix d'abscisses ⟶ m = *tg* 45º = 1

Busquem els punts que verifiquen que $f'(x)=1$:

$$2x-2=1\rightarrow x=\frac{3}{2}\rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3\cdot 2}{2}-3=-\frac{15}{4}$$

L'equació de la recta tangent és: $y+\frac{15}{4}=x-\frac{3}{2}\rightarrow y=x-\frac{21}{4}$

b) La recta tangent és horitzontal ⟶ Busquem els punts que verifiquen que $f'(x)=0$:

$$f'(x)=2x-2 \longrightarrow 2x-2=0\rightarrow x=1\rightarrow f(1)=-4$$

L'equació de la recta tangent és: $y=-4$

43. Pàgina 184

La recta tangent és paral·lela a la recta $y=2x-123$ ⟶ Busquem els punts que verifiquen que $f'(x)=2$:

$$f'(x)=3x^2-1\rightarrow 3x^2-1=2\rightarrow x^2=1\rightarrow \begin{cases} x=\ \ 1 \\ x=-1 \end{cases}$$

- Si $x=1\rightarrow f(1)=4$ i l'equació de la recta tangent és: $y-4=2(x-1)\rightarrow y=2x+2$
- Si $x=-1\rightarrow f(1)=4$ i l'equació de la recta tangent és: $y-4=2(x+1)\rightarrow y=2x+6$

44. Pàgina 184

Perquè les rectes siguin paral·leles ha de passar que $f'(1)=f'(2)$.

$$f'(x)=3kx^2-2x+7k\rightarrow \begin{cases} f'(1)=3k-2+7k \\ f'(2)=12k-4+7k \end{cases}\rightarrow 9k=2\rightarrow k=\frac{2}{9}$$

Si substituïm aquest valor ⟶ $\begin{cases} f'(1)=\frac{2}{9} \\ f'(2)=\frac{2}{9} \end{cases}\rightarrow \begin{cases} f(1)=\frac{-155}{9} \\ f(2)=\frac{-154}{9} \end{cases}$

- Si $x=1$, l'equació de la recta tangent és: $y+\frac{155}{9}=\frac{2}{9}(x-1)\rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{157}{9}$
- Si $x=-1$, l'equació de la recta tangent és: $y+\frac{154}{9}=\frac{2}{9}(x-2)\rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{158}{9}$

45. Pàgina 184

$f(3)=-9a+11 \qquad f'(x)=-2ax+5\rightarrow f'(3)=-6a+5$

L'equació de la recta tangent és: $y+9a-11=(-6a+5)(x-3)\rightarrow y=(-6a+5)x+9a-4$

La recta passa pel punt (5, 0) ⟶ $(-6a+5)5+9a-4=0\rightarrow -21a=-21\rightarrow a=1$

Així doncs, l'equació de la recta tangent és: $y-2=-(x-3)\rightarrow y=-x+5$

L'equació de la recta normal és: $y-2=x-3\rightarrow y=x-1$

46. Pàgina 184

a) $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}$

Perquè sigui paral·lela a $y=2x-3$ en $x=2$ $\rightarrow f'(2)=2$

$f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{4+m}}=2\rightarrow 1=4+m\rightarrow m=-3$

El punt de tangència és: $f(2)=\sqrt{4-3}=1\rightarrow(2,1)$

b) Si la recta tangent passa per $P(a, 5)$ i $Q(1, 1)$ → Pendent = $=\dfrac{5-1}{a-1}=\dfrac{4}{a-1}$

Si $f(x)$ passa per $P(a, 5)$ → $f(a)=\sqrt{a^2+m}=5$

$f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+m}}\rightarrow f'(a)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+m}}=\dfrac{4}{a-1}$ Si substituïm el valor de $f(a)=5$ en $f'(a)$:

$\dfrac{a}{5}=\dfrac{4}{a-1}\rightarrow a(a-1)=4\cdot 5\rightarrow a^2-a-20=0\rightarrow\begin{cases}a=5\\a=-4\end{cases}$

Si substituïm ara en $f(a)$ els valors de a:

- Si $a=5\rightarrow f(5)=\sqrt{5^2+m}=5\rightarrow 5^2+m=5^2\rightarrow m=0$
- Si $a=-4\rightarrow f(-4)=\sqrt{(-4)^2+m}=5\rightarrow(-4)^2+m=5^2\rightarrow m=9$

47. Pàgina 184

$f(2)=3$ $\quad f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\rightarrow f'(2)=-2$

L'equació de la recta tangent és: $y-3=-2(x-2)\rightarrow y=-2x+7$

Els punts de tall de la funció amb els eixos són:

- Amb l'eix Y: $x=0\rightarrow y=7$
- Amb l'eix X: $y=0\rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

Per tant, l'àrea del triangle és: Àrea = $\dfrac{\frac{7}{2}\cdot 7}{2}=\dfrac{49}{4}$ u²

48. Pàgina 184

$f(2)=\sqrt{2^2+5}=3$ $\qquad f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}\rightarrow f'(2)=\dfrac{2}{3}$

L'equació de la recta tangent és: $y-3=\dfrac{2}{3}(x-2)\rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$

Els punts de tall de la funció amb els eixos són:

- Amb l'eix Y: $x=0\rightarrow y=\dfrac{5}{3}$
- Amb l'eix X: $y=0\rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

Per tant, l'àrea del triangle és: Àrea = $\dfrac{\left(0-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{25}{12}$ u²

49. Pàgina 184

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=3+\ln 1=3$$

$$f'(x)=\left(\frac{(tg\,x)'}{tg\,x}\right)=\frac{1}{cos^2x\cdot tg\,x}=\frac{1}{cos\,x\cdot sin\,x}\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{4}{2}=2$$

L'equació de la recta tangent és: $y-3=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow y=2x+\frac{6-\pi}{2}$

Punts de tall:

- Amb l'eix *Y*: $x=0\rightarrow y=\frac{6-\pi}{2}$
- Amb l'eix *X*: $y=0\rightarrow x=\frac{\pi-6}{4}$

$$\text{Àrea}=\frac{\left(0-\frac{\pi-6}{4}\right)\cdot\left(\frac{6-\pi}{2}\right)}{2}=\frac{(6-\pi)^2}{16}$$

50. Pàgina 184

$f(-2)=3 \qquad f(5)=0$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(-2)=-4\\ f'(5)=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Així, les equacions de les rectes tangents són:

$x=-2\;\longrightarrow\; y-3=-4(x+2)\rightarrow y=-4x-5$

$x=5\;\longrightarrow\; y=\frac{1}{6}(x-5)\rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}$

Punts de tall:

- Entre les dues rectes: $-4x-5=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}\rightarrow\frac{25}{6}x=\frac{-25}{6}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$
- La primera recta amb l'eix *X*: $y=0\rightarrow x=\frac{-5}{4}$
- La segona recta amb l'eix *X*: $y=0\rightarrow x=5$

$$\text{Àrea}=\frac{\left(5-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\frac{25}{8}$$

51. Pàgina 184

La funció talla l'eix d'abscisses $\longrightarrow$ $y=0\rightarrow f(x)=(x+1)\cdot e^x=0\rightarrow\begin{cases}x+1=0\\ e^x\neq 0\quad\forall x\end{cases}\rightarrow x=-1$

Així, la funció talla l'eix d'abscisses en *P*(−1, 0).

$$f'(x)=e^x+(x+1)\cdot e^x=e^x\cdot(2+x)\rightarrow f'(-1)=\frac{1}{e}$$

L'equació de la recta tangent és: $y=\frac{1}{e}(x+1)$

L'equació de la recta normal és: $y=-e\cdot(x+1)\rightarrow y=-ex-e$

Tall de la recta tangent amb l'eix *Y*: $x=0\rightarrow y=\frac{1}{e}$

Tall de la recta normal amb l'eix *Y*: $x=0\rightarrow y=-e$

Àrea $=\dfrac{\left(\frac{1}{e}-(-e)\right)\cdot(0-(-1))}{2}=\dfrac{1+e^2}{2e}$

52. Pàgina 184

f(*x*) i *g*(*x*) passen per *P*(−1, 2) ⟶ $f(-1)=1-a+b=2 \quad g(-1)=c=2$

Tenen la mateixa recta tangent en *P* ⟶ $f'(-1)=g'(-1)$

$f'(x)=2x+a\rightarrow f'(-1)=-2+a \qquad g'(x)=-2\cdot e^{-(x+1)}\rightarrow g'(-1)=-2$

Resolem el sistema que formen les tres equacions que hem obtingut:

$$\begin{cases}-2+a=-2\\ 1-a+b=2\rightarrow a=0, b=1, c=2\\ c=2\end{cases}$$

53. Pàgina 185

$x=3\rightarrow 9+16y^2-16=0\rightarrow 16y^2=7\rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⟶ Considerem el punt $\left(3,\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$2x+32yy'=0\rightarrow 32yy'=-2x\rightarrow y'=-\frac{x}{16y}$

$$y'\left(3,\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3}{16\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\frac{3}{4\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y-\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{3\sqrt{7}}{28}(x-3)\rightarrow y=\frac{3\sqrt{7}}{28}x+\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

54. Pàgina 185

$x=4\rightarrow 64-9y^2-36=0\rightarrow 9y^2=28\rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$ ⟶ Considerem el punt $\left(4,\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

$8x-18yy'=0\rightarrow -18yy'=-8x\rightarrow y'=\frac{4x}{9y}$

$$y'\left(4,\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{16}{9\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y-\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{8\sqrt{7}}{21}(x-4)\rightarrow y=\frac{8\sqrt{7}}{21}x-\frac{6\sqrt{7}}{7}$$

55. Pàgina 185

La circumferència que considerem té equació: $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \to x^2+y^2=5$

$y^2=5-x^2 \to y=\pm\sqrt{5-x^2}$, en què: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{5-x^2} \\ g(x)=-\sqrt{5-x^2} \end{cases}$

En primer lloc, per a *f*(*x*): $f(1)=2 \qquad f'(x)=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5-x^2}} \to f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

L'equació de la recta tangent és: $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1) \to y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

En segon lloc, per a *g*(*x*): $g(1)=-2 \qquad g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} \to g'(1)=\dfrac{1}{2}$

L'equació de la recta tangent és: $y+2=\dfrac{1}{2}(x-1) \to y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

Calculem el punt de tall de les dues rectes tangents:

$$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \to x=5 \to (5,0)$$

Calculem el punt de tall de les rectes tangents a *f*(x) i *g*(*x*) amb l'eix d'ordenades:

$$x=0 \to y=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \to \left(0,\frac{5}{2}\right) \qquad x=0 \to y=0-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \to \left(0,-\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Àrea}=\frac{\left(\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}\ \text{u}^2$$

56. Pàgina 185

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

• El pendent de la recta tangent és nul $\longrightarrow f'(0)=c=0 \longrightarrow c=0$

La funció passa pel punt (0, 2) $\longrightarrow f(0)=2 \to d=2$

• El pendent d'aquesta recta tangent és 1 $\longrightarrow f'(1)=1 \to 3a+2b=1$

$x-y-2=0 \xrightarrow{x=1} y=-1 \longrightarrow$ La funció passa pel punt (1, −1) $\longrightarrow f(1)=-1 \to a+b+2=-1 \to a+b=-3$

Si resolem el sistema que formen les equacions anteriors:

$$\begin{cases} 3a+2b=1 \\ a+b=-3 \end{cases} \to a=7, b=-10 \longrightarrow f(x)=7x^3-10x^2+2$$

57. Pàgina 185

a) $y=-2x^2+3x \qquad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$y'=-4x+3 \qquad y'=0 \to x=\dfrac{3}{4}$

$y'(1)=-1<0 \qquad y'(0)=3>0$

La funció és creixent en $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)$ i decreixent en $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

Té un màxim relatiu en $x=\dfrac{3}{4}$.

b) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 10x$ $y' = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}, x = 0, x = 1$

$y'(-3) = -24 < 0$ $y'(-1) = 12 > 0$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ $y'(2) = 36 > 0$

La funció és decreixent en $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (0, 1)$ i creixent en $\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$.

Té mínims relatius en $x = -\frac{5}{2}$ i $x = 1$, i un màxim relatiu en $x = 0$.

c) $y = 4x^3 - x^2 - x + 5$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 12x^2 - 2x - 1$ $y' = 0 \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{13}}{12}, x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$

$y'(-1) = 13$ $y'(0) = -1$ $y'(1) = 9$

La funció és decreixent en $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{12}, \frac{1+\sqrt{13}}{12}\right)$ i creixent en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{12}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{12}, +\infty\right)$.

Té un mínim relatiu en $x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$ i un màxim relatiu en $x = \frac{1-\sqrt{13}}{12}$.

d) $y = x^5 - 5x^3$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 5x^4 - 15x^2$ $y' = 0 \rightarrow 5x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$y'(-2) = 20 > 0$ $y'(-1) = -10 < 0$ $y'(1) = -10 < 0$ $y'(2) = 80 - 60 - 20 > 0$

La funció és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ i decreixent en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Té màxims relatius en $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

58. Pàgina 185

a) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-1) = -2 < 0$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$

$y(1^-) = y(1^+) = y(1) = 0 \longrightarrow$ La funció és contínua en $x = 1$.

$y'(1^-) = 2 \neq y'(1^+) = 1 \longrightarrow$ La funció no és derivable en $x = 1$.

$y'(2) = \frac{1}{2} > 0$

La funció és creixent en $(0, +\infty)$ i decreixent en $(-\infty, 0)$.

Té el mínim relatiu en $x = 0$.

b) $y = |x^2 - 4| - 3 \rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-2) = -4 < 0$ $y'(2) = 4 > 0$ $y'(-1) = 2 > 0$ $y'(1) = -2 < 0$.

La funció és creixent en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ i decreixent en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

Té un màxim relatiu en $x=0$ i mínims relatius en $x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$.

59. Pàgina 185

a) $f(x)=x^2(x+1)$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$

$f'(x)=0\rightarrow x(3x+2)=0\rightarrow x_1=0, x_2=-\dfrac{2}{3}$

$f'(-1)=1>0$ $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}<0$ $f'(1)=5>0$

La funció és creixent en $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ i decreixent en $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$.

Té un màxim relatiu en $x=-\dfrac{2}{3}$ i un mínim relatiu en $x=0$.

b) $g(x)=3x^3-7x+2$ Dom $g(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=9x^2-7$ $g'(x)=0\rightarrow 9x^2=7\rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$g'(-1)=2>0$ $g'(0)=-7<0$ $g'(1)=2>0$

La funció és creixent en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3},+\infty\right)$ i decreixent en $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3},\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Té un màxim relatiu en $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ i un mínim relatiu en $x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h(x)=-x^4+3x^2-2x$ Dom $h(x)=\mathbb{R}$

$h'(x)=-4x^3+6x-2$ $h'(x)=0\rightarrow(x-1)(-4x^2-4x+2)=0\rightarrow x=1, x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$h'(-2)=18>0$ $h'(0)=-2<0$ $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ $h'(2)=-22<0$

La funció és creixent en $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},1\right)$ i decreixent en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Té màxims relatius en $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ i $x=1$, i un mínim relatiu en $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

60. Pàgina 185

a) $y=|x^2-2|\rightarrow y=\begin{cases}x^2-2 & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\\ -x^2+2 & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$

$y'=\begin{cases}2x & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\\ -2x & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$ $y'=0\rightarrow x=0$

$y'(-2)=-4<0$ $y'(-1)=2>0$ $y'(1)=-2<0$ $y'(2)=4>0$

La funció és creixent en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ i decreixent en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

Té mínims relatius en $x=-\sqrt{2}$ i $x=\sqrt{2}$, i un màxim relatiu en $x=0$.

b) $y=|-x^2+6x-9| \rightarrow y=|-(x-3)^2|=(x-3)^2$

$y'=2(x-3)$ $\quad$ $y'=0 \rightarrow x=3$

$y'(0)=-6<0$ $\quad$ $y'(4)=2>0$

La funció és creixent en $(3,+\infty)$ i decreixent en $(-\infty,3)$, i té un mínim relatiu en $x=3$.

c) $y=|-x^2+5x-6| \rightarrow y=\begin{cases}-x^2+5x-6 & \text{si } x\in[2,3]\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$

$y'=\begin{cases}-2x+5 & \text{si } x\in(2,3)\\ 2x-5 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$ $\quad$ $y'=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$

$y'(0)=-5<0$ $\quad$ $y'\left(\frac{11}{5}\right)=\frac{3}{5}>0$ $\quad$ $y'\left(\frac{13}{5}\right)=-\frac{1}{5}<0$ $\quad$ $y'(4)=3>0$

La funció és creixent en $\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ i decreixent en $(-\infty,2)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)$.

Té mínims relatius en $x=2$ i $x=3$, i el màxim relatiu en $x=\frac{5}{2}$.

61. Pàgina 185

a) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\quad$ $f'(x)=0 \rightarrow x=0,\ x=2$

En $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ tenim $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ és creixent.

En $(0,1)\cup(1,2)$ tenim $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ és decreixent.

Així, $f(x)$ té un màxim relatiu en $x=0$ i un mínim relatiu en $x=2$.

b) $g(x)=\frac{40-5x}{10-x}$ $\quad$ Dom $g(x)=\mathbb{R}-\{10\}$

$g'(x)=\frac{-10}{(10-x)^2}<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}-\{10\}$ $\longrightarrow$ Així doncs, $g(x)$ és decreixent en tot el seu domini.

c) $h(x)=\frac{7x^2+2}{x}$ $\quad$ Dom $h(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$h'(x)=\frac{7x^2-2}{x^2}$ $\quad$ $h'(x)=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{7}}$

En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{7}},+\infty\right)$ obtenim que $h'(x)>0 \longrightarrow h(x)$ és creixent.

En $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ obtenim que $h'(x)<0 \longrightarrow h(x)$ és decreixent.

La funció té un màxim relatiu en $x=-\sqrt{\frac{2}{7}}$ i un mínim relatiu en $x=\sqrt{\frac{2}{7}}$.

d) $i(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, i(x)=\mathbb{R}$

$i'(x)=\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ $\qquad$ $i'(x)=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

En $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ obtenim que $i'(x)<0 \longrightarrow i(x)$ és decreixent.

En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ obtenim que $i'(x)>0 \longrightarrow i(x)$ és creixent.

Així, $i(x)$ té un màxim relatiu en $x=\sqrt{2}$ i un mínim relatiu en $x=-\sqrt{2}$.

e) $j(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, j(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

$j'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0 \quad \forall x\neq 2 \longrightarrow j(x)$ és decreixent en tot el seu domini.

f) $k(x)=-\dfrac{x^3}{x^2-3}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, k(x)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

$k'(x)=\dfrac{-x^4+9x^2}{(x^2-3)^2}$ $\qquad$ $k'(x)=0\rightarrow x=0, x=\pm 3$

En $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ obtenim que $k'(x)<0 \longrightarrow k(x)$ és decreixent en aquest interval.

En $(-3,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},3)$ obtenim que $k'(x)>0 \longrightarrow k(x)$ és creixent en aquest conjunt.

La funció té un mínim relatiu en $x=-3$ i un màxim relatiu en $x=3$.

62. Pàgina 185

a) $y=\ln x-2$

El domini de $y(x)$ és l'interval $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x} \longrightarrow y'>0$ en tot el domini de y

Així doncs, no té màxims ni mínims relatius i és creixent per a $x>0$.

b) $y=\ln(x-2)$

El domini de $y(x)$ és l'interval $(2,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x-2} \longrightarrow y'>0$ en tot el domini de y

Així doncs, no té màxims ni mínims relatius i és creixent per a $x>0$.

c) $y=\dfrac{2}{x}+\ln x$

El domini de $y(x)$ és l'interval $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{-2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2+x}{x^2} \longrightarrow y'=0\rightarrow x=2$ $\qquad$ $y'(1)=-1<0$ $\qquad$ $y'(4)=\dfrac{1}{8}>0$

La funció és decreixent en (0, 2) i creixent en $(2,+\infty)$. Té un mínim relatiu en $x=2$.

d) $y = \frac{\ln x}{x}$

El domini de $y(x)$ és l'interval $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$y' = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e$

$y'(1) = 1 > 0$ $\qquad$ $y'(e^2) = \frac{1-2}{e^2} < 0$

Així doncs, hi ha un màxim relatiu en $x = e$, és creixent en $(0, e)$ i decreixent en $(e, +\infty)$.

e) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ $\rightarrow$ El domini de $y(x)$ és l'interval $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $\qquad$ $y' = 0 \rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$

$y'(1) = 1 > 0$ $\rightarrow$ y és creixent a l'esquerra de $x = \sqrt{e}$.

$y'(2) = \frac{1 - 2\ln 2}{8} < 0$

Així doncs, y és decreixent a la dreta de $x = \sqrt{e}$ $\rightarrow$ És creixent en $(0, \sqrt{e})$ i decreixent en $(\sqrt{e}, +\infty)$.

Hi ha un màxim relatiu en $x = \sqrt{e}$.

f) $y = \ln(\sqrt{x})$

El domini de $y(x)$ és l'interval $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$ $\rightarrow$ $y' > 0$ en tot el domini de y

Així doncs, no té màxims ni mínims i és creixent per a $x > 0$.

63. Pàgina 185

a) $f(x) = 2cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\rightarrow$ $f(x) = -2sin(x)$ $\qquad$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

La funció és contínua en tota la recta real i $f'(x) = -2 \cdot cos\, x$.

És periòdica de període 2π, l'estudiem en $[-\pi, \pi]$:

En $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ obtenim que $f'(x) > 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ és creixent en aquest interval.

En $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ obtenim que $f'(x) < 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ és decreixent en aquest interval.

b) $g(x) = x - sin\, x$ $\qquad$ Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$g(x)$ és contínua en tota la recta real.

$g'(x) = 1 - cosx$ $\qquad$ $g'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \pm k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2...$

Però com que a l'interval $[-\pi, \pi]$ $cos\, x \leq 1$, $g'(x)$ sempre és positiva.

Així, $g(x)$ sempre és creixent i no té extrems relatius.

c) $h(x) = arctg\, x$ Dom $h(x) = \mathbb{R}$

$h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \rightarrow h'(x) > 0$ per a tot $x \rightarrow h(x)$ sempre és creixent i no té extrems relatius.

64. Pàgina 185

a) $y = 2x^2 \cdot e^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2xe^x(2+x)$ $y' = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$

En $(-\infty, -2)$ obtenim que $y' > 0$ i en $(-2, 0)$ obtenim que $y' < 0$.

En $(0, \infty)$ obtenim que $y' > 0$.

Així doncs, és creixent en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i decreixent en $(-2, 0)$.

En $x = -2$ presenta el màxim relatiu, i en $x = 0$, el mínim.

b) $y = (x-4) \cdot e^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = e^x(x-3)$ $y' = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$ obtenim que $y' < 0 \rightarrow$ És decreixent en $(-\infty, 3)$.

En $(3, +\infty)$ obtenim que $y' > 0 \rightarrow$ És creixent en $(3, +\infty)$.

En $x = 3$ presenta el mínim relatiu.

c) $y = e^{x^2+2x} + 1$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2(x+1)e^{x^2+2x}$ $y' = 0 \rightarrow x = -1$

En $(-\infty, -1)$ obtenim que $y' < 0 \rightarrow$ És decreixent en $(-\infty, -1)$.

En $(-1, +\infty)$ obtenim que $y' > 0 \rightarrow$ És creixent en $(-1, +\infty)$.

En $x = -1$ presenta el mínim relatiu.

d) $y = x \cdot 2^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2^x(1 + x\ln 2)$ $y' = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{\ln 2}$

En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\ln 2}\right)$ obtenim que $y' < 0 \rightarrow$ És decreixent en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

En $\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$ obtenim que $y' > 0 \rightarrow$ És creixent en $\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$.

En $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$ presenta el mínim relatiu.

e) $y = 2^{x-x^2} - 3$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = (1-2x)2^{x-x^2}\ln 2$ $y' = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ obtenim que $y' > 0 \rightarrow$ És creixent en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

En $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ obtenim que $y' < 0 \rightarrow$ És decreixent en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

En $x = \dfrac{1}{2}$ presenta el màxim relatiu.

f) $y = 2^{x^3+1}$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 \cdot 2^{x^3+1} \cdot \ln 2$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ obtenim que $y' > 0$ i en $(0, +\infty)$ obtenim que $y' > 0$.

Així doncs, és creixent en $\mathbb{R}$ i no té extrems relatius.

65. Pàgina 185

a) $y' = 3x^2 - 24$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$ $y'' = 6x$

$y''(\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} > 0 \rightarrow x = \sqrt{8}$ és un mínim.

$y''(-\sqrt{8}) = -6\sqrt{8} < 0 \rightarrow x = -\sqrt{8}$ és un màxim.

b) $y'(x) = 8 + 12x - 4x^3$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$ $y''(x) = 12 - 12x^2$

$y''(2) = -36 < 0 \rightarrow x = 2$ és un màxim.

$y''(-1) = 0$, $y'''(x) = -24x \rightarrow y'''(-1) = 24 \neq 0 \rightarrow x = -1$ és un punt d'inflexió.

c) $y'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 2$ $y''(x) = \frac{8}{x^3}$

$y''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ La funció presenta un mínim en $x = 2$.

$y''(-2) = -1 < 0 \rightarrow$ La funció presenta un màxim en $x = -2$.

d) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$ $y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y''(0) = 2 \rightarrow$ La funció presenta un mínim en $x = 0$.

66. Pàgina 185

$y(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 13$

Comprovem que si $y(x)$ és sempre creixent, aleshores $y'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$y'(x) = 3x^2 - 4x + 6$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (3 \cdot 6)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-56}}{6}$

$y'(x)$ no té arrels reals (és a dir, no s'anul·la mai) i és contínua $\rightarrow$ El signe de *y* és constant.

Verifiquem el signe de la derivada: $y'(0) = 6 > 0$

És a dir, $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

67. Pàgina 185

$y(x) = x^5 + mx + 2$ $y'(x) = 5x^4 + m$

$5x^4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow m > 0 \rightarrow 5x^4 + m > 0$

Així doncs, $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y(x)$ és creixent en tots els nombres reals i per a qualsevol del paràmetre *m*.