Derivades

7

ACTIVITATS

1. Pàgina 150

Funció $f(x) = x^2 + 1$: $\text{TVM}([0,1]) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$ $\qquad \text{TVM}([-2,-1]) = \dfrac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{2-5}{1} = -3$

Funció $g(x) = x^3 + 7$: $\text{TVM}([0,1]) = \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} = \dfrac{8-7}{1} = 1$ $\qquad \text{TVM}([-2,-1]) = \dfrac{g(-1)-g(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{6-(-1)}{1} = 7$

2. Pàgina 150

$$\text{TVM}([1,5]) = \frac{e(5)-e(1)}{5-1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 25 + 5 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

3. Pàgina 151

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7(2+h)+1-15}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4h-h^2}{4h(2+h)^2} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\dfrac{1}{4}$

4. Pàgina 151

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h+3h^2+h^3}{h} = 3$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2+h-2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. Pàgina 152

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$f'\left(-2^+\right) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-\frac{4}{-2+h}-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{4-4\cancel{h}}{(-2+h)\cdot\cancel{h}} = -\infty \rightarrow$ No existeix.

$f'\left(-2^-\right) = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(-2+h)^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2-4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(h-4) = -4$

6. Pàgina 152

a) $f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$

$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$

Les derivades laterals no existeixen, per tant la funció no és derivable en $x=0$.

b) $f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\frac{1}{4}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[4]{h^3}}=+\infty$

$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{\frac{1}{4}}}{h}=\lim_{h\to 0^-}h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[4]{h^3}}=\nexists$

$f'(0^-)$ no existeix, ja que *h* és un nombre negatiu i la funció no està definida per a nombres negatius.

Així doncs, la funció no és derivable en $x=0$.

7. Pàgina 153

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x\le 3\\ 12x-x^2 & \text{si } x>3\end{cases}$$

- Si $x<3$ → Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty,3)$
- Si $x>3$ → Funció polinòmica contínua i derivable en $(3,+\infty)$
- Si $x=3$:

$f(3^+)=\lim_{x\to 3^+}(12x-x^2)=27$ $\qquad$ $f(3^-)=\lim_{x\to 3^-}(2x-3)=3$

La funció no és contínua en $x=3$ perquè els límits laterals no coincideixen.

Com que la funció no és contínua en $x=3$, podem afirmar que tampoc és derivable en aquest punt.

8. Pàgina 153

$$f(x)=2x+|x+2|\to f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x<-2\\ 3x+2 & \text{si } x\ge -2\end{cases}$$

$\lim_{x\to -2^+}f(x)=-4$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2^-}f(x)=-4$ → La funció és contínua en $x=-2$ → És contínua en tota la recta real.

$f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(-2+h)+2+4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$

$f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)-2+4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=1$

Com que les derivades laterals no coincideixen, la funció no és derivable en $x=-2$.

9. Pàgina 154

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+2(x+h)^2-x^3-2x^2}{h}=3x^2+4x$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2+4(x+h)-3x^2-4x}{h}=6x+4$$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)+4-6x-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6\cancel{h}}{\cancel{h}}=6$$

$$f^{IV}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h}=0$$

A partir de la quarta derivada totes són iguals a 0.

10. Pàgina 154

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x\cdot(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2}+\frac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2+(x+h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}=\frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x+h)^3}-\frac{2}{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-6h^2x-6hx^2-2h^3}{h\cdot x^3\cdot(x+h)^3}=\frac{-6x^2}{x^6}=\frac{-6}{x^4}$$

$$f^{n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

11. Pàgina 155

a) $f(x)=x^2$ i $g(x)=x$

$$h'(x)=7\cdot f'(x)+3\cdot g'(x)$$

$$h'(x)=7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}+3\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=14x+3$$

b) $f(x)=x$ i $g(x)=x+1$

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}+2\cdot f(x)\to h'(x)=\frac{g'(x)\cdot f(x)-g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}+2\cdot f'(x)$$

Així: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Aleshores: $h'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}+2\cdot 1=\frac{-1}{x^2}+2$

c) $f(x)=x$ i $g(x)=x+1$

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}\to h'(x)=\frac{g'(x)\cdot f(x)-g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Aleshores: $h'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ i $g(x)=x^2$

$$h(x)=f(x)+5\cdot g(x)\ \to\ h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}x-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\cdot x^2\cdot(x+h)^2}+5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=-\frac{2}{x^3}+10x$$

12. Pàgina 155

$$[f(x)-g(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)-g'(x)$$

Considerem $f(x)=x$ i $g(x)=x^2$.

Aleshores: $h(x)=3\cdot f(x)-g(x)\rightarrow h'(x)=3\cdot f'(x)-g'(x)$

Així: $h'(x)=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=3\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=3-2x$

13. Pàgina 156

Apliquem la derivada de les funcions potencials: $(x^4)'=4x^3$ $(x^2)'=2x$

Si tenim en compte les operacions amb derivades: $f'(x)=5\cdot 4x^3+3\cdot 2x=20x^3+6x$

14. Pàgina 156

$$f'(x)=4\left(\frac{x-2}{x^5}\right)^3\cdot\frac{1\cdot x^5-(x-2)5x^4}{(x^5)^2}=\frac{4(x-2)^3}{x^{15}}\cdot\frac{x^5-5x^5+10x^4}{x^{10}}=\frac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}}$$

15. Pàgina 157

$$[(g\circ f)(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

16. Pàgina 157

$$k'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+5-2x-5}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

Si $f(x)=2x+5\rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+5-(2x+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

Si $g(x)=\sqrt{x}\rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Com que $k(x)=(g\circ f)(x)$, si apliquem la regla de la cadena:

$$k'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+5}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

17. Pàgina 158

a) $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x)=\frac{-(x-1)\cdot \sin x-\cos x}{(x-1)^2}=\frac{-\sin x}{x-1}-\frac{\cos x}{(x-1)^2}$

c) $f'(x)=e^x\cdot(\sin x+\cos x)$

d) $f'(x)=2e^{2x}$

18. Pàgina 158

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln e^{\lim\limits_{h\to 0}\left[\left(\frac{x+h}{x}-1\right)\frac{1}{h}\right]}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

19. Pàgina 159

a) $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-e^{-x^2}\right)$

b) $f'(x)=2\cos x\cdot e^{2\sin x}$

c) $f'(x)=-2x\cdot 2\cdot\cos(x^2+1)\cdot\sin(x^2+1)=-2x\cdot\sin(2x^2+2)$

d) $f'(x)=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

20. Pàgina 159

a) $f'(x)=-\frac{3}{1-3x}$

b) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)=\ln(2x+1)-\ln(1-2x)\to f'(x)=\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{1-2x}=\frac{4}{1-4x^2}$

c) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln(5x+3)\to f'(x)=\frac{5}{10x+6}$

d) $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(2x+1)-\ln(1-2x)]\to f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{2x+1}+\frac{\cancel{2}}{1-2x}\right)=\frac{2}{1-4x^2}$

SABER FER

21. Pàgina 160

Primer determinem l'expressió algebraica de la funció a partir de la gràfica:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{20}x & 0\le x<20\\ 3 & 20\le x<25\\ \frac{3}{25}x & 25\le x<50\\ -\frac{3}{5}x+36 & 50\le x<60\end{cases}$$

Ara calculem la taxa de variació mitjana en els intervals que ens demanen:

$$\text{TVM}([5,10]) = \frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20}$$

$$\text{TVM}([52,56]) = \frac{f(56)-f(52)}{56-52} = \frac{2{,}4-4{,}8}{4} = -0{,}6$$

22. Pàgina 160

Calculem la taxa de variació mitjana dels intervals que volem analitzar.

$$\text{TVM}([0,7]) = \frac{f(7)-f(0)}{7-0} = \frac{9{,}2-(-2)}{7} = 1{,}6$$

$$\text{TVM}([6,7]) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = \frac{9{,}2-5{,}8}{1} = 3{,}4$$

23. Pàgina 160

a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} (x^2-x+1) = 3$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^4-3x^2+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{(x+1)(2x^3-2x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} (2x^3-2x^2-x+1) = -2$

24. Pàgina 161

a) $f'(x) = 15x^4 - 6 - \frac{6}{x^4}$

b) $f'(x) = \frac{-5}{x^3} + 30x^2$

25. Pàgina 161

$f(1) = a = 3$ (ja que $\ln 1 = 0$)

$f'(x) = 4ax^3 - (b \cdot \ln x + b)$ $\qquad$ $f'(1) = 4 \cdot 3 \cdot 1^3 - b = 11 \rightarrow b = 1$

26. Pàgina 161

Primer estudiem la continuïtat de la funció:

Si $x < 1$ o $x > 1$, la funció és contínua perquè és un polinomi. Cal comprovar què passa en el punt en el qual canvia l'expressió algebraica.

$f(1) = 1-4+3 = 0$

$f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} (x^2-4x+3) = 1-4+3 = 0$ $\qquad$ $f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} (-x^2+4x-3) = -1+4-3 = 0$

Així doncs, la funció és contínua en $\mathbb{R}$.

A continuació estudiem la derivabilitat de la funció:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<1 \\ -2x+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si x < 1 o x > 1, la funció és derivable perquè és un polinomi. Cal comprovar què passa en el punt en el qual canvia l'expressió algebraica.

$$x = 1 \to \begin{cases} f'(1^-) = 2-4 = -2 \\ f'(1^+) = -2+4 = 2 \end{cases}$$ → Com que les derivades laterals no coincideixen, la funció no és derivable en $x = 1$.

27. Pàgina 162

Calculem els límits laterals i el valor de la funció en el punt.

$$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-} x^2 - 2x = 3 = f(3)$$
$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} 2x + a = 6 + a$$

Perquè sigui contínua: $3 = 6 + a \to a = -3$

La funció contínua és: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 3 \\ 2x+3 & x < 3 \end{cases}$

Calculem la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & x > 3 \\ 2 & x < 3 \end{cases}$

Determinem les derivades laterals:

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} 2x - 2 = 4$$
$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} 2 = 2$$

Les derivades laterals no coincideixen, de manera que la funció no és derivable en $x = 3$.

28. Pàgina 162

Primer estudiem la continuïtat de la funció:

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la funció és contínua perquè és un polinomi. Si $0 < x < \pi$, la funció és contínua perquè és una funció trigonomètrica. Comprovem què passa en els punts en els quals canvia l'expressió algebraica.

• Si $x = 0$:

$f(0) = 0$ $\quad$ $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\quad$ $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = sin(a\cdot 0) = 0$

En $x = 0$ la funció sempre és contínua, independentment del paràmetre a.

• Si $x = \pi$:

$f(\pi) = (\pi-\pi)^2 + 1 = 1$ $\quad$ $f(\pi^-) = \lim_{x\to \pi^-} f(x) = sin(a\cdot\pi)$ $\quad$ $f(\pi^+) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = (\pi-\pi)^2 + 1 = 1$

Perquè la funció sigui contínua en $x = \pi$ s'ha de complir que:

$$sin(a\cdot\pi) = 1 \to a\pi = \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} \to a = \frac{2k+1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

A continuació calculem la derivabilitat de la funció:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2k+1}{2}\cdot cos\left(\frac{(2k+1)\cdot x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2(x-\pi) & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Si $x<0$ o $x>\pi$, la funció és derivable perquè és un polinomi. Comprovem què passa en els punts en els quals canvia l'expressió algebraica:

$$f'(0^-)=2 \qquad f'(0^+)=\frac{2k+1}{2} \qquad f'(\pi^-)=\frac{2k+1}{2}\cdot cos\left(\frac{2k+1}{2}\cdot\pi\right) \qquad f'(\pi^+)=0$$

En $x=0$ la funció no és derivable perquè $2=\frac{2k+1}{2}\rightarrow k=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$.

En $x=\pi$ la funció és derivable per a qualsevol valor enter de *k*.

29. Pàgina 163

a) $g'(x)=2e^x \qquad g'(f(x))=2e^{tg(x^2+1)}\rightarrow(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{4x\cdot e^{tg(x^2+1)}}{cos^2(x^2+1)}$

b) $f'(x)=\frac{2x}{cos^2(x^2+1)} \qquad f'(g(x))=\frac{4e^x}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{8e^{2x}}{cos^2\left((2e^x)^2+1\right)}$$

c) $f'(x)=\frac{2x}{cos^2(x^2+1)} \qquad f'(f(x))=\frac{2tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}$

$$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)=\frac{2\cdot tg(x^2+1)}{cos^2\left((tg(x^2+1))^2+1\right)}\cdot\frac{2x}{cos^2(x^2+1)}$$

30. Pàgina 163

Tenim la derivada d'un quocient, de manera que:

$$g(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$g'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}2x^3-6x\log_2 x}{4x^6}=\frac{\frac{2x}{\ln 2}-6\log_2 x}{4x^5}=\frac{x-3\ln 2\log_2 x}{2x^5}$$

31. Pàgina 163

a) $g(x)$ és el producte de $2x^2$ i de $(2x-x^3)^5$; així doncs, la calculem com la derivada d'un producte.

$g'(x)=4x(2x-x^3)^5+2x^2\cdot 5(2x-x^3)^4\cdot(2-3x^2)=(2x-x^3)^4\,(8x-4x^4+20x^2-30x^4)=(2x-x^3)^4\,(8x-34x^4+20x^2)$

b) $g(x)$ és el producte de x^3 i de $\cos x^2$; així doncs, la calculem com la derivada d'un producte.

$g'(x)=3x^2\cos x^2+x^3(-\sin x^2)\,2x=x^2(3\cos x^2-2x^2\sin x^2)$

ACTIVITATS

32. Pàgina 164

$$\mathrm{TVM}([2,3])=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{TVM}([2,5])=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1}{10}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-2-h}{2h(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

33. Pàgina 164

$$\mathrm{TVM}([-1,2])=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$\mathrm{TVM}([-1,3])=\frac{f(3)-f(-1)}{3+1}=\frac{5+3}{4}=2$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-4+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=-2$$

34. Pàgina 164

$$\mathrm{TVM}([1,6])=\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=\frac{\frac{3}{8}-1}{5}=-\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{TVM}([1,4])=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{(1+h)+2}-\frac{3}{1+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3}-\cancel{3}-\cancel{h}}{\cancel{h}(3+h)}=-\frac{1}{3}$$

35. Pàgina 164

$$f(x)=\ln(x+b)$$

$$\mathrm{TVM}([0,2])=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\ln(2+b)-\ln b}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)}{2}=\ln 2\ \rightarrow\ b=\frac{2}{3}$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(0+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(0+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+2}{2}\right)}{h}=\frac{3}{2}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(2+h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(2+\frac{2}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3h+8}{8}\right)}{h}=\frac{3}{8}$$

36. Pàgina 164

$$\mathrm{TVM}([0,6])=\frac{s(6)-s(0)}{6}=\frac{116-2}{6}=19$$

37. Pàgina 164

La funció que mesura la superfície d'un cercle segons la longitud del seu radi x és: $f(x)=\pi x^2$

$$\text{TVM}([1,3])=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9\pi-\pi}{2}=4\pi \qquad \text{TVM}([3,5])=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{25\pi-9\pi}{2}=8\pi$$

Encara que la variació del radi és la mateixa, la variació de la superfície no resta constant.

38. Pàgina 164

a) $\text{TVM}([1,7])=\frac{f(7)-f(1)}{7-1}=\frac{245-5}{6}=40 \qquad \text{TVM}([1,5])=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{125-5}{4}=30$

b) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{5(1+h)^2-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{10\cancel{h}+5h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=10$

39. Pàgina 164

a) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(2+h)-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

b) $f'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(-2+h)^3-(-2)^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^3-6h^2+12h}{h}=12$

c) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=1$

40. Pàgina 164

a) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{ah+\cancel{b}-\cancel{b}}{h}=a$

b) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a(0+h)^2+b(0+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{ah^2+bh}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(ah+b)=b$

c) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{ah^2+bh+\cancel{c}-\cancel{c}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(ah+b)=b$

d) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{ah^3+bh^2+ch+\cancel{d}-\cancel{d}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(ah^2+bh+c)=c$

41. Pàgina 164

a) $f'(x)=4x+4x^3\to f'(2)=40$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\to f'(2)=-\frac{1}{4}$

c) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}\to f'(2)=-\frac{1}{4}$

d) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\to f'(2)=\frac{1}{4}$

e) $f'(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\geq -3\\ -x-3 & \text{si } x<-3\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>-3\\ -1 & \text{si } x<-3\end{cases}\to f'(2)=1$

f) $f'(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x\geq 2\\ -x+2 & \text{si } x<2\end{cases}$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)+2}{h} = -1$$

Les derivades laterals existeixen però no són iguals; així doncs, la funció no és derivable en $x = 2$.

42. Pàgina 164

a) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(1^-)$

b) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ $f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{h}}$

No existeix la derivada per l'esquerra perquè l'arrel quadrada no està definida per a valors negatius.

43. Pàgina 164

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

La funció és contínua en $x = 3$, perquè $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = -1$.

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h-1+1}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-(3+h)+2+1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1$$

Les derivades laterals existeixen però són diferents, per tant la funció no és derivable.

b) $f(x) = \begin{cases} x+9-x^2 & \text{si } x < -3 \\ x-9+x^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ x+9-x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La funció és contínua en $x = 3$: $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = 3$

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3+h+9-(3+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-5h}{h} = -5$$

$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h+\cancel{3}-9+(h+3)^2-\cancel{3}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+7h}{h} = 7$$

Les derivades laterals existeixen però són diferents, per tant la funció no és derivable.

44. Pàgina 164

$f(x) = \begin{cases} 4-x-x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 3x+4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3\cdot(-2+h)+4-2}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3h-4}{h} = -\infty \to \text{No existeix.}$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{4-(-2+h)-(-2+h)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{3h-h^2}{h} = 3$$

45. Pàgina 164

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 5 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1+h}{1+h-1}-5}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-4h}{h^2}=+\infty=f'(1^-)$$

Les derivades laterals no existeixen.

46. Pàgina 164

a) $f(x)=\begin{cases}-2+x & x\geq 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2+2+h}{h}=-1$$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Les derivades laterals no són iguals, per tant $f(x)$ no és derivable en $x=2$.

b) $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<-2\\ -x^2+4 & -2\leq x\leq 2\\ x^2-4 & x>2\end{cases}$

$$g'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h+h^2}{h}=4$$

$$g'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-4h-h^2}{h}=-4$$

Les derivades laterals no són iguals, per tant $g(x)$ no és derivable en $x=2$.

47. Pàgina 164

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=+\infty$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=+\infty$$

48. Pàgina 164

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-(1+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-2h-3}{h}=-\infty$$

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2+3-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

49. Pàgina 165

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x}=0=f(0)\ \longrightarrow f(x)$ és contínua en $x=0$.

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty\ \longrightarrow f(x)$ no és derivable en $x=0$.

50. Pàgina 165

a) Si $x>0$: $f(x)=\cos x \rightarrow$ Funció trigonomètrica contínua i derivable en $(0,+\infty)$

Si $x<0$: $f(x)=-x^2+1 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty,0)$

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$ $\qquad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+1)=1$ $\qquad f(0)=1$

Així doncs, la funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<0\\ -\sin x & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{cases}$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals, per tant *f*(*x*) és derivable en $\mathbb{R}$.

b) Si $x>0$: $f(x)=-x^3+2x+1 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(0,+\infty)$

Si $x<0$: $f(x)=2\cdot\sin x+1 \rightarrow$ Funció trigonomètrica contínua i derivable en $(-\infty,0)$

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^3+2x+1)=1$ $\qquad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2\cdot\sin x+1)=1$ $\qquad f(0)=1$

Així doncs, la funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}2\cdot\cos x & \text{si } x<0\\ -3x^2+2 & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=2\\ f'(0^+)=2\end{cases}$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals, per tant *f*(*x*) és derivable en $\mathbb{R}$.

c) Si $x>2$: $f(x)=7-2^x \rightarrow$ Funció exponencial contínua i derivable en $(2,+\infty)$

Si $x<2$: $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-5} \rightarrow$ Funció racional contínua i derivable en $(-\infty,2)$

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=2$:

$f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}(7-2^x)=3$ $\qquad f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{2x-5}=-5$

Així, la funció no és contínua en $x=2$ i, per tant, tampoc és derivable en aquest punt.

És a dir, la funció és contínua i derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

d) Si $x>1$: $f(x)=-2x^2+3 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(1,+\infty)$

Si $x<1$: $f(x)=-4x+5 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty,1)$

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=1$:

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x^2+3)=1$ $\qquad f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}-4x+5=1$

Així doncs, la funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & \text{si } x<1\\ -4x & \text{si } x>1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(1^-)=-4\\ f'(1^+)=-4\end{cases}$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals, per tant *f*(*x*) és derivable en $\mathbb{R}$.

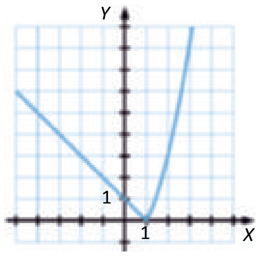
51. Pàgina 165

$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)=\lim_{x\to 1^-}(-x+1)=0=f(1)\ \rightarrow f(x)$ és contínua en $x=1$.

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}(2+h)=2$$
$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1$$

Les derivades laterals no són iguals, per tant $f(x)$ no és derivable en $x=1$.

a)



b) No existeix, perquè si una funció és discontínua en un punt no pot ser derivable en aquest punt.

52. Pàgina 165

Si $x>2: f(x)=-2x\rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(2,+\infty)$

Si $x<2: f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\rightarrow$ Funció racional contínua i derivable en $(-\infty,2)$, tret de $x=1$

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty \qquad f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$$

$f(x)$ no és contínua en $x=1$, per tant no és derivable en $x=1$.

Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}(-2x)=-4 \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-1}=3$$

$f(x)$ no és contínua en $x=2$, per tant no és derivable en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x<2\\ -2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

Així, la funció és contínua i derivable en $\mathbb{R}-\{1, 2\}$.

53. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2} & \text{si } -2\le x<1\\ 1-3\sqrt{2x-1} & \text{si } 1\le x\le 5\end{cases} \qquad \text{Dom}\left(\frac{x^2+2x-3}{1-x^2}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\} \qquad \text{Dom}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

- Si $x\in(-2,-1)\cup(-1,1)\ \rightarrow\ f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}\rightarrow$ Funció racional contínua i derivable
- Si $x\in(1,\ 5)\ \rightarrow f(x)=1-3\sqrt{2x-1}\rightarrow$ Funció radical contínua i derivable

- Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=-1$:

$$f\left(-1^{+}\right)=\lim_{x\to -1^{+}}\frac{x^{2}+2x-3}{-\left(x^{2}-1\right)}=\lim_{x\to -1^{+}}\frac{-(x+3)}{x+1}=+\infty \qquad f\left(-1^{-}\right)=\lim_{x\to -1^{-}}\frac{x^{2}+2x-3}{1-x^{2}}=\lim_{x\to -1^{-}}\frac{-(x+3)}{x+1}=-\infty$$

Així, la funció no és contínua i, per tant, no és derivable en $x=-1$.

- Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=1$:

$$f\left(1^{+}\right)=\lim_{x\to 1^{+}}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=-2 \qquad f\left(1^{-}\right)=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{x^{2}+2x-3}{1-x^{2}}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{-(x+3)}{x+1}=-2 \qquad f(1)=-2$$

Així, la funció és contínua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x+1)^{2}} & \text{si } x\in[-2,\,-1)\cup(-1,\,1)\\[2mm] \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x\in(1,\,5]\end{cases} \to \begin{cases} f'\left(1^{-}\right)=\dfrac{1}{2}\\ f'\left(1^{+}\right)=-3\end{cases} \longrightarrow \text{La funció no és derivable en } x=1.$$

54. Pàgina 165

- Si $x<-4: f(x)=-1\to$ Funció constant contínua i derivable en $(-\infty,-4)$
- Si $-4<x<2: f(x)=x+2\to$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-4,2)$
- Si $x>2: f(x)=\dfrac{8}{x}\to$ Funció racional contínua i derivable en $(2,+\infty)$
- Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=-4$:

$$f\left(-4^{+}\right)=\lim_{x\to -4^{+}}(x+2)=-2 \qquad f\left(-4^{-}\right)=\lim_{x\to -4^{-}}-1=-1$$

$f(x)$ no és contínua en $x=-4$, per tant no és derivable en $x=-4$.

- Estudiem la continuïtat i la derivabilitat en $x=2$:

$$f\left(2^{+}\right)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{8}{x}=4 \qquad f\left(2^{-}\right)=\lim_{x\to 2^{-}}(x+2)=4$$

$f(x)$ no és contínua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<-4\\ 1 & -4<x<2\\ -\dfrac{8}{x^{2}} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(2^{-})=1\\ f'(2^{+})=-2\end{array}\right\} \longrightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals, per tant } f(x) \text{ no és derivable en } x=2.$$

Així, la funció és derivable en $\mathbb{R}-\{-4,\,2\}$.

55. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases}2x^{2}+5x+6 & \text{si} \quad x\le -1\\ 2-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1<x<2\\ \dfrac{5}{4}+2^{-x} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

- Si $x < -1 \rightarrow f(x) = 2x^2 + 5x + 6 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty, -1)$
- Si $-1 < x < 0$ i $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = 2 - \frac{1}{x} \rightarrow$ Funció contínua i derivable en $(-1, 0) \cup (0, 2)$
- Si $x > 2 \rightarrow f(x) = \frac{5}{4} + 2^{-x} \rightarrow$ Funció exponencial contínua i derivable en $(2, +\infty)$
- Si $x = -1$:

$$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 3 \qquad f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} (2x^2 + 5x + 6) = 3 \qquad f(-1) = 3$$

Així, la funció és contínua en $x = -1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2 \\ \frac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-1^-) = 1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{La funció és derivable en } x = -1.$$

- Si $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Així, la funció no és contínua en $x = 0$; per tant, no és derivable en aquest punt.

- Si $x = 2$:

$$f(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{5}{4} + 2^{-x}\right) = \frac{3}{2} \qquad f(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2} \qquad f(2) = \frac{3}{2}$$

Així, la funció és contínua en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2 \\ \frac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = \frac{1}{4} \\ f'(2^+) = \frac{-\ln 2}{4} \end{cases} \rightarrow \text{La funció no és derivable en } x = 2.$$

En resum, la funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$ i derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

57. Pàgina 165

a) • Si $x > 3: f(x) = x^2 - 2x \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(3, +\infty)$

- Si $x < 3: f(x) = 2x + a \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty, 3)$
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 3$.

$$\left.\begin{array}{r} f(3^-) = \lim_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ f(3^+) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 6 + a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La funció només pot ser derivable si és contínua, per tant considerem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 3 \\ 2x - 3 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(3+h) - 3 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

Les derivades laterals existeixen, però no són iguals; per tant, $f(x)$ no és derivable en $x = 3$.

58. Pàgina 165

- Si $x < -1 : f(x) = -4x - 3 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty, -1)$
- Si $-1 < x < 1 : f(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-1, 1)$
- Si $x > 1 : f(x) = \dfrac{k+2}{x} \rightarrow$ Funció racional contínua i derivable en $(1, +\infty)$
- Perquè la funció sigui contínua en $x = -1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(-1) = 1$:

  $f(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x^2 - 1) = 1$ $\qquad$ $f(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-4x - 3) = 1$

  $f(x)$ és contínua en $x = -1$.

- Perquè la funció sigui contínua en $x = 1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = k + 2$:

  $f(1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{k+2}{x} = k + 2$ $\qquad$ $f(1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (2x^2 - 1) = 1$

  $f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow k + 2 = 1 \rightarrow k = -1$.

  Si $k = -1$: $f'(x) = \begin{cases} -4 & x < -1 \\ 4x & -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

  $\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -4 \\ f'(-1^+) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Les derivades laterals existeixen i són iguals, per tant $f(x)$ és derivable en $x = -1$.

  $\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Les derivades laterals no són iguals, per tant $f(x)$ no és derivable en $x = 1$.

59. Pàgina 165

a) • Si $x < 0 : f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \rightarrow$ Funció racional contínua i derivable en $(-\infty, 0)$

- Si $0 < x < 3 : f(x) = ax + b \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(0, 3)$
- Si $x > 3 : f(x) = x - 5 \rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(3, +\infty)$
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 0$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = b$:

  $f(0^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 1$ $\qquad$ $f(0^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (ax + b) = b$

  $f(x)$ és contínua en $x = 0$ si $b = 1$.

  Considerem que $b = 1$; així, perquè la funció sigui contínua en $x = 3$ els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 3a + 1$:

  $f(3^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 5) = -2$ $\qquad$ $f(3^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (ax + 1) = 3a + 1$

  $f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 3a + 1 = -2 \rightarrow a = -1$

b) Si $a=-1$ i $b=1$: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} & x<0 \\ -1 & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{r} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Les derivades laterals no són iguals, per tant $f(x)$ no és derivable en $x=0$.

$\left.\begin{array}{r} f'(3^-)=-1 \\ f'(3^+)=1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Les derivades laterals no són iguals, per tant $f(x)$ no és derivable en $x=3$.

60. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases} 7-2x+6 & \text{si } x\geq 3 \\ 7+2x-6 & \text{si } x<3 \end{cases}=\begin{cases} 13-2x & \text{si } x\geq 3 \\ 1+2x & \text{si } x<3 \end{cases}$$

- Si $x<3$: $f(x)=13-2x\rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty, 3)$
- Si $x>3$: $f(x)=1+2x\rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(3,+\infty)$
- Si $x=3$:

$f(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}(1+2x)=7$ $\qquad f(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+}(13-2x)=7$ $\qquad f(3)=7$

Així doncs, la funció és contínua en $x=3$.

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x>3 \\ 2 & \text{si } x<3 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} f'(3^+)=-2 \\ f'(3^-)=2 \end{cases}$$

Per tant, la funció no és derivable en $x=3$.

61. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^3+x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

- Si $x<0$: $f(x)=-x^3+x+1\rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty, 0)$
- Si $x>0$: $f(x)=x^3+x+1\rightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable en $(2,+\infty)$
- Si $x=0$:

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+x+1)=1$ $\qquad f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^3+x+1)=1$ $\qquad f(0)=1$

Per tant, la funció és contínua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x>0 \\ -3x^2+1 & \text{si } x<0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=1 \end{cases}$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs, la funció és derivable en $x=0$.

• D'altra banda:

$$f(x)=|x|^3+|x|+1=\begin{cases}-x^3-x+1 & \text{si } x<0\\ x^3+x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0) \longrightarrow$ Contínua en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x>0\\ -3x^2-1 & \text{si } x<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^+)=1\\ f'(0^-)=-1\end{cases}$$

Les derivades laterals existeixen però són diferents; així doncs, la funció no és derivable en $x=0$.

62. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\leq 0\\ x^2+a & \text{si } x>0\end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable, en primer lloc ha de ser contínua.

La funció és contínua en $x=0$ si els límits laterals són iguals i coincideixen amb $f(0)=\cos 0=1$.

$$\left.\begin{array}{l}f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a\end{array}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)\rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\leq 0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\sin x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs, $f(x)$ és derivable en $x=0$ si $a=1$.

63. Pàgina 165

a) • Si $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-3) \longrightarrow f(x)=\dfrac{x}{x+4} \longrightarrow$ Funció racional contínua i derivable

• Si $x\in(-3,+\infty) \longrightarrow f(x)=x^2+ax \longrightarrow$ Funció polinòmica contínua i derivable

• Si $x=-4$:

No és contínua ni derivable en $x=-4$, ja que no pertany al domini.

• Si $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l}f(-3^-)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x}{x+4}=-3\\ f(-3^+)=\lim\limits_{x\to -3^+}(x^2+ax)=9-3a\end{array}\right\}\rightarrow f(-3^-)=f(-3^+)=f(3)\rightarrow 9-3x=-3\rightarrow a=4$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si } x>-3\\ \dfrac{4}{(x+4)^2} & \text{si } x<-3\end{cases}\rightarrow \begin{cases}f'(-3^+)=-2\\ f'(-3^-)=4\end{cases}\rightarrow f'(3^+)\neq f'(3^-)$$

Per tant, no existeix cap valor de a per al qual la funció és derivable en $x=-3$.

b) • Si $x\in(-\infty,1) \rightarrow f(x)=2x+e^{1-x}$ → Funció exponencial contínua i derivable

• Si $x\in(1,+\infty) \rightarrow f(x)=1+\sqrt{x+m}$ → Funció radical contínua i derivable $\forall\, m\geq -x$

• Si $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+e^{1-x})=3 \\ f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+\sqrt{x+m})=1+\sqrt{1+m} \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-)=f(1^+)\rightarrow 3=1+\sqrt{1+m}\rightarrow m=3$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2-e^{1-x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si } x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^+)=1 \\ f'(1^-)=\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow f'(1^+)\neq f'(1^-)$$

Per tant, no existeix cap valor de a per al qual la funció és derivable en $x = 1$.

64. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{25-x^2} & \text{si } -5\leq x<4 \\ x^2+mx+n & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 4$ ha de ser contínua en aquest punt:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-)=\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{25-x^2}=3 \\ f(4^+)=\lim\limits_{x\to 4^+}(x^2+mx+n)=16+4m+n \end{array}\right\} \rightarrow f(4^-)=f(4^+)=f(4)\rightarrow 4m+n=-13$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 4$, les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}} & \text{si } -5<x<4 \\ 2x+m & \text{si } x>4 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4^-)=-\dfrac{4}{3} \\ f(4^+)=8+m \end{array}\right\} \rightarrow 8+m=-\frac{4}{3}\rightarrow m=-\frac{28}{3}$$

Així: $16+4\cdot\left(-\frac{28}{3}\right)+n=3 \rightarrow\rightarrow n=3+\frac{112}{3}-16\rightarrow n=\frac{73}{3}$

65. Pàgina 165

$$f(x)=\begin{cases} 1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1) & \text{si } x>0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

a) • Si $x\in(0,+\infty) \rightarrow f(x)=1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)$ → Producte de funcions contínues i derivables en $(0,+\infty)$

• Si $x\in(-\infty,0) \rightarrow f(x)=(x-1)^2$ → Funció polinòmica contínua i derivable en $(-\infty,0)$

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)^2=1 \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+a\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1))=1+a\cdot 0=1\ \forall a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\quad \forall a\in R$$

b) $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{a\cdot(\ln(x+1)+2)}{2\cdot\sqrt{x+1}} & \text{si } x>0 \\ 2x-2 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Perquè la funció sigui derivable: $f'(0^+)=f'(0^-)\rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=\dfrac{a\cdot(\ln(1)+2)}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2a}{2} \\ f'(0^-)=-2 \end{cases} \rightarrow a=-2$