84. Pàgina 145

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1+2x}{x+4}\right)^{\frac{m}{3-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\left(\frac{m}{3-x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{-m}{x+4}\right)} = e^{\frac{-m}{7}} = e \to m = -7$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-2}{3x-4}\right)^{\frac{m}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{3x-4}\right)\left(\frac{m}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{m(x-2)(x-1)}{(3x-4)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{m(x-1)}{(3x-4)}} = e^{\frac{m}{2}} = e^2 \to m = 4$

85. Pàgina 145

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-ax-2}{\left(\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-ax}{2\sqrt{x^2}} = \frac{-a}{2} = 3 \to a = -6$$

86. Pàgina 145

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{mx+6}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(1-m)x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{mx+6}\right)} \neq \infty \to 2$ és arrel d'$(1-m)x-4$.

$(1-m)2-4=0 \Rightarrow m=-1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x+6}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

87. Pàgina 145

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}x = 0$

88. Pàgina 145

a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-x^2+1\right) = -3$

b) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-x^2+1\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\sqrt{x+1}\right)=0\end{cases}\right\} \to \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1} = \sqrt{3}$

f) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-7)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x+1}=2\end{cases}\right\} \to \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

89. Pàgina 145

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2^x+1\right) = 1$

b) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2^x+1\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-3x+2)=2\end{cases}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(-3x+2) = -1$

e) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-2x}{x-1}=-4 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(-3x+2)=-4\end{cases}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -4$

c) $\lim\limits_{x\to -1}(2^x+1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-2x}{x-1}=-2$

90. Pàgina 145

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\frac{-3}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=-\infty\end{array}\right\}\to$ No existeix $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\frac{-4}{2}=-2$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-(x+1)}=-\frac{4}{3};$

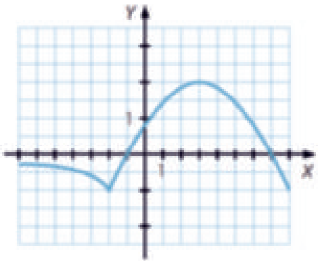
$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{-(x+1)}=-\frac{4}{3}\to$ Per tant, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\frac{4}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

91. Pàgina 145

Resposta oberta. Per exemple:



92. Pàgina 145

a) $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\to$ La funció és contínua en $x=0$.

$f(2)=4=\lim\limits_{x\to 2}f(x)\to$ La funció és contínua en $x=2$.

b) No existeix $f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0{,}5\to$ Existeix $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0{,}5$.

La funció no és contínua en $x=0$; té una discontinuïtat evitable.

$f(2)=2{,}5=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

La funció és contínua en $x=2$.

c) No existeix $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 1$; té una discontinuïtat de salt finit.

d) $f(-1) = 1 = \lim\limits_{x\to -1} f(x) \to$ La funció és contínua en $x = -1$.

$f(2) = 1{,}5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}5 \to$ Existeix $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2{,}5$

La funció no és contínua en $x = 2$; té una discontinuïtat evitable.

e) No existeix $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to -2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = -2$; té una discontinuïtat de salt infinit.

$f(2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = -2$; té una discontinuïtat de salt finit.

f) $f(1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 1$; té una discontinuïtat de salt finit.

93. Pàgina 145

a) La funció és polinòmica; per tant, és contínua en $\mathbb{R}$.

b) La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$. Estudiem la discontinuïtat en els zeros del denominador, $x = 2$ i $x = 3$.

No existeix $f(2)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$

La funció no és contínua en $x = 2$; té una discontinuïtat de salt infinit.

No existeix $f(3)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$

La funció no és contínua en $x = 3$; té una discontinuïtat de salt infinit.

c) $x^2 - 4 \geq 0 \to (x+2)(x-2) \geq 0 \to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

La funció és contínua en el seu domini, l'interval $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to (2+x)(2-x) \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La funció és contínua en el seu domini, l'interval $[-2, 2]$.

e) No existeix $f(0)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$, té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La funció és contínua en el seu domini, l'interval $(-\infty, 2)$.

g) $y = 2|x-1| = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2-2x & \text{si } x < 1 \end{cases} \to$ És contínua en tots els punts excepte, potser, en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-2x) = 0;\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} 2|x-1| = 0 = y(0)$

La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

h) $y = |x-3| + |x+3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ És contínua en tots els punts excepte, potser, en $x = -3$ o $x = 3$.

En $x = -3$:

$\lim\limits_{x\to -3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^-} (-2x) = 6;\ \lim\limits_{x\to -3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^+} 6 = 6$

$\lim\limits_{x\to -3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(-3) \to$ La funció és contínua en $x = -3$.

En $x = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^-} (6) = 6;\ \lim\limits_{x\to 3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(3)$

La funció és contínua en $x = 3$ i, per tant, en tot $\mathbb{R}$.

94. Pàgina 145

a) Estudiem la continuïtat en $x = 2$, ja que la funció és contínua en la resta de punts.

No existeix $f(2)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 2$.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ per a qualsevol x real $\to$ La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

c) Estudiem la continuïtat en $x = 1$, que és l'únic zero del denominador.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 1$.

d) Estudiem la continuïtat en $x = -1$ i $x = 3$, que anul·len el denominador.

No existeix $f(-1)$.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$

La funció té una discontinuïtat evitable en $x = -1$.

No existeix $f(3)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 3$.

e) Estudiem la continuïtat en $x = -3$ i $x = 1$, que anul·len el denominador.

No existeix $f(-3)$. A més: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = -3$.

No existeix $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La funció té una discontinuïtat evitable en $x = 3$.

f) Estudiem la continuïtat en $x = 0$ i $x = 1$, que anul·len el denominador.

No existeix $f(0)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$.

No existeix $f(1)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 1$.

95. Pàgina 145

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)}$

L'únic punt en què $f(x)$ pot ser discontínua és $x = 2$:

No existeix $f(2)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2} (-x-1) = -3$$

$f(x)$ té una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

b) Si definim $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, $g(x)$ conté $f(x)$ i, a més, és contínua en $\mathbb{R}$.

96. Pàgina 146

a) El domini de la funció és $[-5, 4) \cup (4, +\infty)$; $f(x)$ presenta una discontinuïtat evitable en $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{6\left(3 - \sqrt{x+5}\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{-6(x-4)}{(x-4)\left(3+\sqrt{x+5}\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{-6}{3+\sqrt{x+5}} = -1$$

b) Resposta oberta. Per exemple: $g(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<-5\\ f(x) & \text{si } -5\le x<4\\ -1 & \text{si } x=4\\ f(x) & \text{si } x>4\end{cases}$

97. Pàgina 146

a) $f(x)$ presenta una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x^2-2x+1)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x+1}{4}=\frac{1}{4}$$

b) $g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x=0\end{cases}$

98. Pàgina 146

$f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}$ → La funció és contínua en $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$.

En $x=-2$: $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x-2)}{x+1}=-4$

$f(x)$ és discontínua evitable en $x = -2$.

En $x=-1$: $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=\frac{3}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=+\infty\end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim_{x\to -1} f(x).$

$f(x)$ és discontínua de salt infinit en $x = -1$.

99. Pàgina 146

Les funcions tenen la mateixa gràfica excepte en el punt $x = -2$. La primera és una recta i és contínua, i la segona està formada per dues semirectes i no és contínua en $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{(2x-1)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2x-1)=-5$$

La discontinuïtat de la segona funció en $x = -2$ és evitable.

Així, la segona funció és: $g(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<-2\\ 2x-1 & \text{si } x>-2\end{cases}$

100. Pàgina 146

a) En $x = -1$, la funció $f(x) = -x$; per tant, és contínua.

En $x = 0$, existeix $f(0) = 2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$

$f(x)$ té una discontinuïtat de salt finit en $x = 0$.

En $x = 3$, no existeix $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+2) = 5 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 5 = 5$$

$f(x)$ té una discontinuïtat de salt finit en $x = 3$.

b) En $x = -1$, existeix $f(-1) = -3$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (5x+2) = -3 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(\frac{x+6}{x^2}\right) = 5$$

$f(x)$ té una discontinuïtat de salt finit en $x = -1$.

En $x = 0$, no existeix $f(0)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+6}{x^2} = \frac{6}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+6}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+6}{x^2} = +\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ té una discontinuïtat de salt infinit en $x = 0$.

En $x = 3$, existeix $f(3) = 1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+6}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(x^2 - 2x - 2\right) = 1$$

$f(x)$ és contínua en $x = 3$.

101. Pàgina 146

Existeix $f(2)$: $f(2) = -\dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-x} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(2-x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{-2}{3}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\dfrac{2}{3} = f(2) \to$ $f(x)$ és contínua en $x = 2$.

102. Pàgina 146

Les tres funcions són polinòmiques i, per tant, contínues en el seu domini. Estudiem la continuïtat en $x = 0$ i $x = 2$:

En $x = 0$, existeix $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \to$ $f(x)$ és contínua en $x = 0$.

En $x = 2$, existeix $f(2) = 3$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$

$f(x)$ presenta una discontinuïtat de salt finit en $x = 2$.

103. Pàgina 146

No existeix $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1\end{array}\right\}\rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$$

La funció té una discontinuïtat evitable en $x=0$.

$f(3)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$$

La funció té una discontinuïtat de salt infinit en $x=3$.

104. Pàgina 146

Estudiem la continuïtat de la funció en $x=0$, $x=2$ i $x=3$:

En $x=0$, existeix $f(0)=e^0=1$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x=1$$

$f(x)$ és contínua en $x=0$.

En $x=2$, existeix $f(2)=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} e^x=e^2 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{3-x}=2$$

$f(x)$ presenta una discontinuïtat de salt finit en $x=2$.

En $x=3$, no existeix $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2}{3-x}=\frac{2}{0}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{3-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{3-x}=-\infty\end{array}\right\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x=3$.

105. Pàgina 146

a) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Les funcions dels dos trossos són contínues en $\mathbb{R}$; així doncs, només pot ser discontínua en $x=0$.

$f(0)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\rightarrow$ És contínua en $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}-x-5 & \text{si } x<-5\\ x+5 & \text{si } x\geq -5\end{cases}$

Les funcions dels dos trossos són contínues en $\mathbb{R}$; així doncs, només pot ser discontínua en $x=-5$.

$f(-5)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=0\end{array}\right\}\rightarrow \lim\limits_{x\to -5} f(x)=0 \rightarrow \lim\limits_{x\to -5} f(x)=f(-5)\rightarrow$ És contínua en $x=-5$.

c) $f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si } x\le\dfrac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Les funcions dels dos trossos són contínues en $\mathbb{R}$; així doncs, només pot ser discontínua en $x=\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right) \to$ És contínua en $x=\dfrac{3}{2}$.

d) $x^2-x-6=0 \to x=-2;\ x=3 \to f(x)=\begin{cases} x^2-x-6 & \text{si } x\le -2 \\ -x^2+x+6 & \text{si } -2<x\le 3 \\ x^2-x-6 & \text{si } x>3\end{cases}$

Les funcions de cada tros són contínues en $\mathbb{R}$. Tan sols pot ser discontínua en $x=-2$ o en $x=3$.

$f(-2)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to-2} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to-2} f(x)=f(-2) \to$ És contínua en $x=-2$.

$f(3)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to3} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3) \to$ És contínua en $x=3$.

e) $6-x^2=0\to\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6}\end{cases} \to f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{si } x\le-\sqrt{6} \\ 6-x^2 & \text{si } -\sqrt{6}<x\le\sqrt{6} \\ x^2-6 & \text{si } x>\sqrt{6}\end{cases}$

Les funcions de cada tros són contínues en $\mathbb{R}$. Tan sols pot ser discontínua en $x=-\sqrt{6}$ o en $x=\sqrt{6}$.

$f\left(-\sqrt{6}\right)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\sqrt{6}^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to-\sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to-\sqrt{6}} f(x)=f\left(-\sqrt{6}\right) \to$ La funció és contínua en $x=-\sqrt{6}$.

$f\left(\sqrt{6}\right)=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sqrt{6}^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to\sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to\sqrt{6}} f(x)=f\left(\sqrt{6}\right) \to$ La funció és contínua en $x=\sqrt{6}$.

106. Pàgina 146

La funció serà contínua en $x=2$ si $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to2} f(x)=-1$

Aleshores, la funció és contínua en $x=2$ si:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } x<2 \\ -1 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>2\end{cases}$$

107. Pàgina 146

a) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 4$:

Existeix $f(4) = 12$. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^2 - 4) = 12$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x + a) = 4 + a$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 4^-} f(x) = 12 = 4 + a = \lim_{x\to 4^+} f(x) \to a = 8$

b) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 1$:

Existeix $f(1) = 3 - a$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax) = 3 - a$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + a\ln x) = 2$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a = 1$

c) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = -2$.

Existeix $f(-2) = 2$. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \sqrt{2 - x} = 2$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - 3x + a) = 10 + a$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to -2^-} f(x) = 2 = 10 + a = \lim_{x\to -2^+} f(x) \to a = -8$

d) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = -1$.

Existeix $f(-1) = -a$. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{a}{x} = -a$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + 1) = 2$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x\to -1^+} f(x) \to a = -2$

e) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 2$.

Existeix $f(2) = 3a^2$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3a^x = 3a^2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{12}{x - 1} = 12$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 2$

f) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 0$ o $x = 2$.

Existeix $f(0) = 1$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 1) = 1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + a^2) = a^2$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to a = \pm 1$

Existeix $f(2) = 2a + 1$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x + a^2) = 2 + a^2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax + 1) = 2a + 1$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 1$

Per tant, $f(x)$ serà contínua si $a = 1$.

g) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = a$.

Existeix $f(a) = 2^a + 1$. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} (2^x + 1) = 2^a + 1$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} 5 = 5$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to a^-} f(x) = 2^a + 1 = 5 = \lim_{x\to a^+} f(x) \to a = 2$

h) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 0$.

Existeix $f(0) = 2 + a$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2 + a\cdot \cos x) = 2 + a$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2^{-x} + 6x - 3) = -2$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 + a = -2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to a = -4$

i) $f(x)$ és contínua excepte, potser, en $x = 4$.

Existeix $f(4) = 1$. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (\cos(x - 4)) = 1$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a}$

$f(x)$ és contínua $\to \lim_{x\to 4^-} f(x) = 1 = 2^{4-2a} = \lim_{x\to 4^+} f(x) \to a = 2$

108. Pàgina 146

a) Com que les funcions separadament són contínues en els intervals en els quals estan definides, la funció serà contínua si ho és en $x = 0$ i $x = 3$.

En $x = 0$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Existeix $f(0) = b$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 2x - 1) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax + b) = b$

Per tant, $b = -1$.

En $x = 3$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Existeix $f(3) = 1$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (ax + b) = 3a - 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (1) = 1$

Per tant, $a = \frac{2}{3}$.

b) Com que les funcions separadament són contínues en els intervals en els quals estan definides, la funció serà contínua si ho és en $x = -1$ i $x = 2$.

En $x = -1$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

Existeix $f(-1) = a - 3$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax^2 + 3x) = a - 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - a) = -1 - a$

Per tant, $a = 1$.

En $x = 2$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Existeix $f(2) = 8 - a = 7$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^3 - a) = 8 - a = 7$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (bx - 3) = 2b - 3$

Per tant, $b = 5$.

109. Pàgina 147

a) La funció $\frac{2}{2-x}$ no és contínua en $x = 2$, siguin els que siguin els valors de a i b.

b) Com que les funcions separadament són contínues en els intervals en els quals estan definides, la funció serà contínua si ho és en $x = -1$ i $x = 1$.

En $x = -1$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

Existeix $f(-1) = -a + 3$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax + 3) = -a + 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (bx^2 + 5) = b + 5$

Per tant, $b = -a - 2$.

En $x = 1$, la funció serà contínua si: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Existeix $f(1) = b + 5$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (bx^2 + 5) = b + 5$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2\sqrt{x+3} + a) = 4 + a$

Per tant, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

c) Com que les funcions separadament són contínues en els intervals en els quals estan definides, la funció serà contínua si ho és en $x = 0$ i $x = \pi$.

En $x = 0$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Existeix $f(0) = 3$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^3 + 2x + 3\right) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(a \cdot \sin x + b\right) = b$

Per tant, $b = 3$.

En $x = \pi$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = f(\pi)$

Existeix $f(\pi) = b = 3$.

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \left(a \cdot \sin x + b\right) = b = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} \left((x-\pi)^2 + a\right) = a$

Per tant, $a = 3$.

d) Com que les funcions separadament són contínues en els intervals en els quals estan definides, la funció serà contínua si ho és en $x = -2$ i $x = 2$.

En $x = -2$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$

Existeix $f(-2) = -7$.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (3x - 1) = -7$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \left(ax^2 + bx\right) = 4a - 2b$

En $x = 2$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Existeix $f(2) = 4a + 2b$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(ax^2 + bx\right) = 4a + 2b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(2^x - 5\right) = -1$

Aleshores: $\left.\begin{array}{l} 4a - 2b = -7 \\ 4a + 2b = -1 \end{array}\right\} \to a = -1,\ b = \dfrac{3}{2}$

110. Pàgina 147

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -1 + 2x & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Cada una de les funcions és contínua en el seu domini; per tant, $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = \dfrac{1}{2}$ i $x = 3$.

En $x = \dfrac{1}{2}$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Existeix $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} (1 - 2x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} (-1 + 2x) = 0$

$f(x)$ és contínua en $x = \dfrac{1}{2}$.

En $x = 3$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

Existeix $f(3) = a^3 - 3$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-1+2x) = 5$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (a^x - 3) = a^3 - 3$

Aleshores: a = 2

b) $f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < \frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3} \le x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Cada una de les funcions és contínua en el seu domini; per tant, $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = \frac{4}{3}$ i $x = 2$.

En $x = \frac{4}{3}$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existeix $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{4}{3}^-} (4-3x) = 0$ $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{4}{3}^+} (3x-4) = 0$

$f(x)$ és contínua en $x = \frac{4}{3}$.

En $x = 2$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Existeix $f(2) = a^2 - 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x-4) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (a^x - x) = a^2 - 2$

Aleshores: $a = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 4-5x & \text{si } x < \frac{4}{5} \\ 5x-4 & \text{si } \frac{4}{5} \le x < 1 \\ |a-2| & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Cada una de les funcions és contínua en el seu domini; per tant, $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = \frac{4}{5}$ i $x = 1$.

En $x = \frac{4}{5}$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to \frac{4}{5}} f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right)$

Existeix $f\left(\frac{4}{5}\right) = 0$. $\lim\limits_{x\to \frac{4}{5}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{4}{5}^-} (4-5x) = 0$ $\lim\limits_{x\to \frac{4}{5}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{4}{5}^+} (5x-4) = 0$

$f(x)$ és contínua en $x = \frac{4}{5}$.

En $x = 1$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Existeix $f(1) = |a-2|$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (5x-4) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} |a-2| = |a-2|$

Aleshores: $a = 1$ o bé $a = 3$

d) Suposem que $a \leq 4$, aleshores: $f(x)=\begin{cases}-x+4 & \text{si } x<a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \geq a\end{cases}$

Cada una de les funcions és contínua en el seu domini; per tant, $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = a$.

En $x = a$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Existeix $f(a) = a^2 - 6a + 8$.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (-x+4) = -a+4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (x^2-6x+8) = a^2-6a+8$

$-a+4 = a^2-6a+8 \to a^2-5a+4=0 \to a=4$ o bé $a=1$

Suposem que $a > 4$, aleshores: $f(x)=\begin{cases}-x+4 & \text{si } x<4 \\ x-4 & \text{si } 4 \leq x < a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \geq a\end{cases}$

Cada una de les funcions és contínua en el seu domini.

$f(x)$ és contínua en $x = 4$ perquè prové del valor absolut; $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = a$.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (x-4) = a-4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (x^2-6x+8) = a^2-6a+8$

$a-4 = a^2-6a+8 \to a^2-7a+12=0 \to a=3$ o bé $a=4$, però hem suposat que a és més gran que 4.

Deduïm que la funció és contínua per a $a = 1$ i $a = 4$.

e) Cada una de les funcions és contínua en el seu domini; per tant, $f(x)$ serà contínua si ho és en $x = a$.

En $x = a$, la funció serà contínua si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Existeix $f(a) = \sin^2 a$.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} \sin^2(x) = \sin^2 a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (-\cos^2(x)+x) = -\cos^2(a)+a$

$\sin^2 a = -\cos^2(a)+a \to \sin^2 a + \cos^2 a = a \to a = 1$

111. Pàgina 147

La població inicial és $f(0)=\dfrac{18+0^2}{(0+3)^2}=2$ milions d'individus.

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{18+t^2}{(t+3)^2} = 1 \to$ A llarg termini, la població tendeix a ser d'un milió d'individus.

112. Pàgina 147

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{36x+8}{x+2} = 36$ flexions

113. Pàgina 147

$R(x) = 0 \to$ Funció constant $\to R(x)$ és contínua en (0, 600).

$R(x) = 40 + \dfrac{400+56x}{1.640+0{,}1x} \to$ Està definida en $\mathbb{R} - \{-16.400\} \to R(x)$ és contínua en $(200, +\infty)$.

$$R(600) = 60 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 600^-} R(x) = 60 \\ \lim\limits_{x\to 600^+} R(x) = 0 \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 600} R(x).$$

Així doncs, la funció no és contínua en $x = 600$, i té una discontinuïtat de salt finit.

114. Pàgina 147

$$f(x) = \begin{cases} 10{,}50x & \text{si} \quad 0 \le x < 10 \\ 7{,}50x & \text{si} \quad 10 \le x < 20 \\ 5{,}50x & \text{si} \quad 20 \le x \end{cases}$$

La funció està formada per funcions polinòmiques, que són contínues en els intervals en què estan definides.

Estudiem els punts on canvia l'expressió algebraica.

En $x = 10$: $\quad f(10) = 75 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = 105 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = 75 \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 10} f(x) \longrightarrow$ En $x = 10$ té una discontinuïtat de salt finit.

En $x = 20$: $\quad f(20) = 110 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 20^-} f(x) = 150 \\ \lim\limits_{x\to 20^+} f(x) = 110 \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 10} f(x) \longrightarrow$ En $x = 20$ té una discontinuïtat de salt finit.

Com que està formada per funcions polinòmiques, $\text{Dom} f = [0, +\infty)$.

115. Pàgina 147

$G(x) = 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} \to$ Funció polinòmica $\longrightarrow G(x)$ és contínua en $(0, 9)$.

$G(x) = 3 + \dfrac{75x + 5.400}{10x^2} \to$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow G(x)$ és contínua en $(9, +\infty)$.

Estudiem la funció en el punt on canvia l'expressió algebraica: $x = 9$.

$G(9) = 10{,}5 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 9^-} G(x) = 10{,}5 \\ \lim\limits_{x\to 9^+} G(x) = 10{,}5 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 9} G(x) = 10{,}5 = G(9) \to$ La funció és contínua en $(0, +\infty)$.

116. Pàgina 147

$P(t) = 50 - t^2 \to$ Funció polinòmica $\longrightarrow P(t)$ és contínua en $[0, 9]$.

$P(t) = 56 - \dfrac{20t}{t+1} \to$ Definida en $\mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow P(t)$ és contínua en $(3, +\infty)$.

Estudiem la funció en el punt on canvia l'expressió algebraica: $x = 3$.

$P(3) = 41 \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} P(t) = 41 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} P(t) = 41 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 9} P(t) = 41 = P(3) \to$ La funció és contínua en $(0, +\infty)$.

$$\lim_{t\to +\infty} P(t) = \lim_{t\to +\infty}\left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 20 = 36$$

Així doncs, amb el pas del temps la planxa suportarà un pes de 36 tones.

117. Pàgina 147

a) Les funcions que componen $P(x)$ són contínues en els intervals en què estan definides, en els quals $P(x)$ també és contínua. Tan sols hem d'estudiar el que passa en $x = 20$, on canvia l'expressió algebraica.

Perquè la funció sigui contínua: $\lim\limits_{x\to 20^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 20^+} P(x) = 41 = P(20)$

$P(20) = 60$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 20^-} P(x) = 60 \\ \lim\limits_{x\to 20^+} P(x) = \sqrt{a\cdot 20^2 + 2.000} \end{array}\right\} \to \sqrt{a\cdot 20^2 + 2.000} = 60 \to 400a + 2.000 = 3.600 \to a = 4$

b) El preu del litre sortiria a: $\dfrac{P(x)}{x} \to \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 2.000}}{x} = \sqrt{a}$ €/litre costaria l'oli.

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

1. Pàgina 148

No, l'exemple anterior es tracta d'un cas concret, són termes d'una sèrie geomètrica de raó $\frac{1}{2}$, per això la suma dels termes és un valor finit.

Si escollim, per exemple, el conjunt dels nombres naturals parells, la suma no és un valor finit:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + ... = +\infty$

2. Pàgina 148

Sí, si treballem amb un recorregut de qualsevol distància $d > 0$, les distàncies a cada gambada serien els termes de la successió següent:

$\left\{a_1 = \dfrac{d}{2}, a_2 = \dfrac{d}{4}, a_3 = \dfrac{d}{8}, a_4 = \dfrac{d}{16}, \ldots, a_n = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right\} \to$ Sèrie geomètrica amb $r = \dfrac{1}{2}$

3. Pàgina 148

Es tracta d'un límit quan n tendeix a infinit.

4. Pàgina 148

El terme general de la successió és $a_n = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tal com hem estudiat en cursos anteriors, podem sumar els infinits termes d'una sèrie geomètrica per mitjà de la fórmula següent, si $0 < r < 1$:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = d$$