85. Pàgina 29

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&0&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&0&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&16\\0&0&0\\16&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4&0&2^4\\0&0&0\\2^4&0&2^4\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

86. Pàgina 29

a) $A\cdot M=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\2c&2d\end{pmatrix}$ $\qquad M\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&3a+2b\\c&3c+2d\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{cases}a+3c=a\\b+3d=3a+2b\\2c=c\\2d=3c+2d\end{cases}\right.\to\begin{cases}a=\lambda\\b=3\alpha-\lambda\\c=0\\d=\alpha\end{cases}\to M=\begin{pmatrix}\lambda&3\alpha-\lambda\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_2\\0&2^2\end{pmatrix}$, en què $b_2=2\cdot3+3=2\cdot b_1+3$

$A^3=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&2^3\end{pmatrix}$, en què $b_3=2\cdot9+3=2\cdot b_2+3$

$A^4=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&45\\0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_4\\0&2^4\end{pmatrix}$, en què $b_4=2\cdot21+3=2\cdot b_3+3$

$A^n=\begin{pmatrix}1&b_n\\0&2^n\end{pmatrix}$, en què $b_n=2\cdot b_{n-1}+3$

A més d'expressar A^n de manera recurrent, es pot escriure així:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&3\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$$

87. Pàgina 29

a) $M^2=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}$ $\qquad M^3=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}$

$M^4=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&4a^3b\\0&a^4\end{pmatrix}$ $\qquad M^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix}$

b) $M^{100}=\begin{pmatrix}a^{100}&100a^{99}b\\0&a^{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\to a=\pm1$

- Si $a=1\to b=\frac{1}{100}\to M_1=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{100}\\0&1\end{pmatrix}$
- Si $a=-1\to b=-\frac{1}{100}\to M_2=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{100}\\0&-1\end{pmatrix}$

88. Pàgina 30

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & m\\ m & -2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+n & m\\ m & -2m+n\end{pmatrix}$$

Així, si igualem els termes:

$$\begin{cases}2=m+n\\ -1=m\\ -1=m\\ 5=-2m+n\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=3\end{cases}$$

b) $A^2=-A+3I\rightarrow A^5=\left(A^2\right)^2\cdot A=\left(-A+3I\right)\left(-A+3I\right)A=\left(A^2-3A-3A+9I\right)A=$

$$=\left(-A+3I-3A-3A+9I\right)A=\left(-7A+12I\right)A=-7A^2+12A=-7\left(-A+3I\right)+12A=19A-21I$$

Per tant:

$$A^5=19\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}-21\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 19\\ -38 & -2\end{pmatrix}$$

89. Pàgina 30

a) Resposta oberta. Per exemple:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 8-6\\ 4m-3m & 2m+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 2\\ m & 2m+9\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 2\\ m & 2m+9\end{pmatrix}$$

Així, si igualem els termes:

$$\begin{cases}4=16+2m\\ m=m\\ 2=2\\ -3=2m+9\end{cases}\rightarrow m=-6$$

c) $\left[\begin{pmatrix}1 & m\\ n & 0\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}1+mn & m\\ n & mn\end{pmatrix}\rightarrow mn=0$

Les matrius són del tipus $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 0\end{pmatrix}$ o bé $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

90. Pàgina 30

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1n}a_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\dots+b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\dots+b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

El primer element de la diagonal de la matriu *BA* està format per tots els primers sumands dels elements de la diagonal de la matriu *AB*.

El segon element de la diagonal de la matriu *BA* està format per tots els segons sumands dels elements de la diagonal de la matriu *AB*, i així successivament.

b) $Tr\ AB=Tr\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}=7+15=22$ $\qquad Tr\ BA=Tr\begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=a-1$

$a-1=22\rightarrow a=23$

91. Pàgina 30

a) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}\longrightarrow$ Les matrius són del tipus $B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bé $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

92. Pàgina 30

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-2F_1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}\longrightarrow$ El rang és 2.

b) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=3F_2-2F_1}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow$ El rang és 1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-F_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-F_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow$ El rang és 3.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_1=4F_1+F_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\longrightarrow$ El rang és 2.

93. Pàgina 30

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$ El rang és 2.

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = 2F_3 - F_1]{F_2 = 4F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 9F_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ El rang és 2.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_1]{F_2 = F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ El rang és 2.

94. Pàgina 30

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{7}{2} & 4 & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{7}{2}F_1]{F_2 = F_2 + 4F_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{El rang és 2.}$$

95. Pàgina 30

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1-3a & 3-a \end{pmatrix} \rightarrow 3 - a = 0 \rightarrow a = 3$$

Si $a = 3$, el rang de la matriu és 2.

96. Pàgina 30

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 - 3F_3]{F_2 = F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & -2 & m-18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & 0 & 9m-126 \end{pmatrix}$$

$9m - 126 = 0 \rightarrow m = 14$

- Si $m = 14$, aleshores: Rang $(A) = 2$
- Si $m \neq 14$, aleshores: Rang $(A) = 3$

97. Pàgina 30

$$\begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - C_1]{C_2 = C_2 - C_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \\ a & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } (M) = 2$$

És a dir, el rang de la matriu sempre és 2, independentment del valor del paràmetre a.

98. Pàgina 30

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

Les columnes 2 i 3 són linealment dependents amb la columna 1:

$$C_2=-\frac{1}{2}C_1 \qquad C_3=\frac{1}{4}C_1$$

Si C_4 és linealment dependent amb C_1 $\rightarrow$ Rang $=1$

En cas contrari $\rightarrow$ Rang $=2$

És a dir:

- $m=12 \rightarrow C_4=2C_1 \rightarrow$ Totes les columnes són linealment dependents $\rightarrow$ Rang $=1$
- $m\neq 12 \rightarrow$ La primera i la segona columna són linealment independents $\rightarrow$ Rang $=2$

99. Pàgina 30

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rang és independent de n i sempre és 3.

100. Pàgina 30

a) Perquè $A=\begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$ sigui antisimètrica, s'ha de complir que:

$$\left.\begin{array}{l} a=-b \\ a=-(c-4) \\ 3=-c \end{array}\right\} \rightarrow a=7, b=-7, c=-3, d=0 \text{. Així: } A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ -7 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ -4 & 0 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_1+dF_3} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$

- Si $d=0 \rightarrow$ Rang $(A)=1$
- Si $d\neq 0 \rightarrow$ Rang $(A)=3$

101. Pàgina 30

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+(2a+4)F_1]{F_2=F_2+2F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 4 & -2+a \\ 0 & a+2 & 3a+a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-\frac{a+2}{4}F_2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 4 & -2+a \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}a^2+3a+1 \end{pmatrix}$$

Si $\frac{3}{4}a^2+3a+1=0$ la matriu té rang 2; en cas contrari el rang és 3.

Busquem per quins valors la matriu té rang 2:

$$\frac{3}{4}a^2+3a+1=0 \to 3a^2+12a+4=0 \to a=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}=\frac{-12\pm\sqrt{96}}{6}=-2\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Si $a\neq -2\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}$, aleshores la matriu té rang 3.

102. Pàgina 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+5F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=4F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \to B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=2F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to D^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

103. Pàgina 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=3F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B^{-1}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-6 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ -6 & 4 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=6F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 6\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{4}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$AB^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Es compleix que $A\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

104. Pàgina 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & -4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=2F_1+3F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1+4F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & 9 & 12\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 2 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=3F_2-4F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1-2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & 9 & -6\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)$$

Podem comprovar que:

$$\left(A^{-1}\right)^t=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\left(A^t\right)^{-1}$$

105. Pàgina 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1/2 & 1/2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=2F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=-\frac{F_2}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=3F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3/2 & -1\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Aquests resultats es compleixen per a qualsevol matriu invertible.

106. Pàgina 31

$A^{-1} = 2I - A \rightarrow AA^{-1} = A(2I - A) = 2A - A^2 = I$

$2\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ab+c^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -cb & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c = 0,\ b = -\dfrac{1}{a}$

Per tant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

107. Pàgina 31

Busquem una matriu de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 2a+c \\ b & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}$

Així, $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, però M no és invertible.

Per tant, no són semblants.

108. Pàgina 31

a) $A^2 - 3I = 2A \rightarrow A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A - 2I) = 3I \rightarrow A \cdot \left(\dfrac{1}{3}(A - 2I)\right) = I \ \longrightarrow\ A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \ \longrightarrow\ \begin{pmatrix} x^2+y^2-3 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$2xy = 2y \rightarrow x = 1$ o bé $y = 0$

- Si $x = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 - 3 = 2x \rightarrow 1 + y^2 - 3 = 2 \rightarrow y = \pm 2$. Aleshores:

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ o bé $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Si $y = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 3$. Aleshores:

  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o bé $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

109. Pàgina 31

$AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = BB^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \longrightarrow\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{14} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{5}{14} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{14} & \dfrac{3}{7} \end{pmatrix}$

110. Pàgina 31

a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a-c & a \\ 2b-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2c+d \\ -a & -c \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2a-c = 2a+b \\ a = 2c+d \\ 2b-d = -a \\ b = -c \end{cases} \to \begin{cases} a = -2\lambda + \alpha \\ b = \lambda \\ c = -\lambda \\ d = \alpha \end{cases}$

Les matrius que commuten amb A tenen la forma: $\begin{pmatrix} -2\lambda+\alpha & -\lambda \\ \lambda & \alpha \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n-1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1+1 & -1 \\ --1 & --1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

111. Pàgina 31

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{cF_1 - aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = cF_1 - aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{cb-ad}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 - bF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1-\frac{bc}{cb-ad} & \frac{ab}{cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{cb-ad-bc}{a\,cb-ad} & \frac{ab}{a\,cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{cb-ad} & \frac{b}{cb-ad} \\ \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Perquè sigui invertible ha de complir que $cb - da \neq 0$.

112. Pàgina 31

$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^3 \\ 0 & 1/5^3 & 0 \end{pmatrix}$

Per tant:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ és parell} \\ \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \\ 0 & 1/5^n & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ és imparell} \end{cases}$$

113. **Pàgina 31**

$$A^2+7A=I \to A(A+7I)=I \qquad A^{-1}=A+7I$$

114. **Pàgina 31**

a) $A^t=A^{-1} \to A^tA=I \to \begin{pmatrix}1&0&a\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&b\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2&ab&ac\\ab&\frac{1}{2}+b^2&\frac{1}{2}+bc\\ca&\frac{1}{2}+bc&\frac{1}{2}+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{cases}a=0\\b=\frac{1}{\sqrt{2}}\\c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ o bé $\begin{cases}a=0\\b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\c=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

b) Si $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, aleshores $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \to A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \to A^4=(A^2)^2=I$

Si $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, aleshores $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \to A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix} \to A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

115. **Pàgina 31**

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2I$

b) $A\cdot A=2I \to \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot A=A^{-1}2I \to \frac{1}{2}A=A^{-1} \to A^{-1}=A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) $A^2=2I \to A^{12}=(A^2)^6=(2I)^6=2^6I \qquad A^{-1}=\frac{1}{2}A \to A^{-12}=(A^{-1})^{12}=\left(\frac{1}{2}A\right)^{12}=\left(\frac{1}{2^2}A^2\right)^6=\left(\frac{1}{2^2}2I\right)^6=\frac{1}{2^6}I$

116. **Pàgina 31**

a) $AX=B \to X=A^{-1}AX=A^{-1}B$

b) $XA=B \to X=XAA^{-1}=BA^{-1}$

c) $AX+B=C \to AX=C-B \to X=A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$

d) $AX+A=B \to AX=B-A \to X=A^{-1}AX=A^{-1}(B-A)=A^{-1}B-I$

e) $A^{-1}X=B \to X=AA^{-1}X=AB$

f) $AXB=C \to X=A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

g) $A^tX=B \to X=(A^t)^{-1}A^tX=(A^t)^{-1}B$

h) $AXA=A^2+I \to X=A^{-1}AXAA^{-1}=A^{-1}(A^2+I)A^{-1}=(A^{-1}A^2+A^{-1})A^{-1}=(A+A^{-1})A^{-1}=I+(A^{-1})^2$

117. Pàgina 31

Si $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, tenim que: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+3 & c-1 \\ b+2 & d-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+3=1 \\ b+2=2 \\ c-1=-1 \\ d-5=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=12 \end{cases} \rightarrow X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \text{És una matriu diagonal.}$$

118. Pàgina 31

Aïllem X, és a dir: $A+X=2B \rightarrow X=2B-A$

Aleshores: $X=2B-A \rightarrow X=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

119. Pàgina 31

$$2A-5X=B \rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow 5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 1/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

120. Pàgina 32

Aïllem la matriu *X*.

$$A-A^2=A\cdot B-X \rightarrow -X=A-A^2-A\cdot B \rightarrow X=A^2-A+A\cdot B \rightarrow X=A\cdot\ A-I+B$$

Operem la matriu per obtenir la matriu que ens demanen. Així doncs:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

121. Pàgina 32

La matriu ha de ser d'ordre 2×4 perquè puguem fer el producte i la suma corresponents.

Considerem $X=\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Així: $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

122. Pàgina 32

Considerem $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c+1 \\ b+1 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ b+1=a+d \\ c+1=d+a \\ d=c+b \end{cases} \to \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{1}{3} \\ d=\frac{2}{3} \end{cases} \to X=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

123. Pàgina 32

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a+2c \\ b & -b+2d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-b & c-d \\ 2b & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-b & -a+3c-d \\ 3b & -b+4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3b=1 \\ -a+3c-d=-2 \\ -b+4d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=-\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases} \to X=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

124. Pàgina 32

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot D\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

125. Pàgina 32

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -20 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

126. Pàgina 32

$$X-I\,B=A \to X-I\,BB^{-1}=AB^{-1} \to X-I=AB^{-1} \to X=AB^{-1}+I \to B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

127. Pàgina 32

a) $AX - A^t = A \rightarrow AX = A + A^t \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\ A + A^t \rightarrow X = I + A^{-1}A^t$

A ha de tenir inversa. Per a això, el rang de la matriu ha de ser 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+4F_1]{F_2=F_2+5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1+5m \\ 0 & 11 & 1+4m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=12F_3-11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1+5m \\ 0 & 0 & 1-7m \end{pmatrix}$$

Si $1 - 7m = 0$, la matriu no té inversa. És a dir, per a $m \neq \frac{1}{7}$ l'equació sí que té solució.

b) $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -29 & 25 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

128. Pàgina 32

$X + XA = B^t \rightarrow X\ I + A\ = B^t \rightarrow X = B^t\ I + A\ ^{-1}$

$$X \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

129. Pàgina 32

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

b) $AXA = A^2 + A \rightarrow X = A^{-1}(A^2 + A)A^{-1} = A^{-1}A(A+I)A^{-1} = (A+I)A^{-1} = I + A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

130. Pàgina 32

$XB + A = B + A^2 \rightarrow XB = B + A^2 - A \rightarrow XBB^{-1} = B + A^2 - A\ B^{-1} \rightarrow X = I + A^2 - A\ B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131. Pàgina 32

a) Si sumem la segona equació més la primera, resulta: $3X=\begin{pmatrix}3&-3\\3&3\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

Aïllem a la segona equació i obtenim Y. $X-\begin{pmatrix}1&-4\\3&0\end{pmatrix}=Y\rightarrow Y=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-4\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\-2&1\end{pmatrix}$

b) Si restem la primera equació menys la segona, resulta: $2Y=\begin{pmatrix}2&6\\4&8\end{pmatrix}\rightarrow Y=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

Aïllem a la segona equació i obtenim X. $X=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\1&-3\end{pmatrix}$

c) Si sumem la segona equació més dues vegades la primera, resulta: $7X=\begin{pmatrix}14&-7\\7&0\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$

Aïllem a la primera equació i obtenim Y. $3X+Y=\begin{pmatrix}5&-1\\2&3\end{pmatrix}\rightarrow Y=\begin{pmatrix}5&-1\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$

d) Multipliquem la primera equació per 3 i hi restem dues vegades la segona.

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=\begin{pmatrix}-1&5\\2&0\end{pmatrix}\\3X-2Y=\begin{pmatrix}1&0\\4&-2\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}6X+9Y=\begin{pmatrix}-3&15\\6&0\end{pmatrix}\\6X-4Y=\begin{pmatrix}2&0\\8&-4\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow 13Y=\begin{pmatrix}-5&15\\-2&4\end{pmatrix}\rightarrow Y=\begin{pmatrix}-\frac{5}{13}&\frac{15}{13}\\-\frac{2}{13}&\frac{4}{13}\end{pmatrix}$$

Aïllem a la primera equació i obtenim X:

$$2X=\begin{pmatrix}-1&5\\2&0\end{pmatrix}-3Y=\begin{pmatrix}-1&5\\2&0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{13}&\frac{15}{13}\\-\frac{2}{13}&\frac{4}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{13}&\frac{20}{13}\\\frac{32}{13}&-\frac{12}{13}\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{13}&\frac{10}{13}\\\frac{16}{13}&-\frac{6}{13}\end{pmatrix}$$

132. Pàgina 32

$$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)A-(A+B)B=(A+B)(A-B)$$

$$(A+B)^{-1}(A+B)(A-B)=A-B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-1&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\\A-B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$ Si sumem les dues equacions, resulta: $2A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Substituïm a la primera equació i obtenim B.

$$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

133. Pàgina 32

Hem de resoldre aquest sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Multipliquem la primera equació per 2 i hi restem la segona per obtenir *X*:

$$\left.\begin{array}{l} 4X+2Y=\begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow X=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Aïllem a la primera equació i obtenim *Y*:

$$Y=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}-2X=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

134. Pàgina 32

Si restem la primera equació menys la segona, resulta:

$$BY=C-Y \rightarrow BY+Y=C \rightarrow B+I\ Y=C \rightarrow Y=B+I^{-1}C$$

$$Y=\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aïllem a la segona equació i obtenim *X*:

$$AX=Y \rightarrow X=A^{-1}AX=A^{-1}Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

135. Pàgina 32

$$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4X+2Y=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow 5X=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 20 \\ -10 & 30 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Aïllem a la segona equació i obtenim *Y*:

$$2Y=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -8 & -10 \\ -16 & 2 & -16 \\ -2 & -24 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -8 & 1 & -8 \\ -1 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

136. Pàgina 32

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ -\mu & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

- Si $\mu=0 \longrightarrow$ No existeix inversa de A.

- Si $\mu\neq 0 \xrightarrow{F_1=\frac{F_1}{\mu}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Així:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \mu=-2$$

b) $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix}^t \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

137. Pàgina 32

a) $M^2+3M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)^2+3\alpha+3 & 0 \\ 3+\alpha & -2 \end{pmatrix}$

$(\alpha+1)^2+3\alpha+3=0 \rightarrow (\alpha+1)[(\alpha+1)+3]=0 \rightarrow \alpha = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

La matriu no és invertible quan $\alpha=-1$ o bé quan $\alpha=-4$.

b) $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$MX+M=2I \rightarrow MX=2I-M \rightarrow X=M^{-1}(2I-M)=2M^{-1}-I \longrightarrow X=2M^{-1}-I=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

138. Pàgina 33

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{cases} A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{3n+1} = A \\ A^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) $X\cdot\ A^4+A^2-A\ =\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow X\cdot\ A+A^2-A\ =X\cdot A^2=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}$

$X\cdot A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot A\rightarrow X=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&3\\1&1&1\end{pmatrix}$

139. Pàgina 33

a) $\begin{pmatrix}4&2&2\\2&a&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=2F_3+F_1]{F_2=2F_2-F_1}\begin{pmatrix}4&2&2\\0&2a-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

- Si $a=1$, aleshores: Rang $(A)=2$
- Si $a\neq1$, aleshores: Rang $(A)=3$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&a\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F'_3=F_2+F_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&a\\0&0&0&1+a\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2+2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&8&7&a+8\\0&0&0&1+a\end{pmatrix}$

- Si $a=-1$, aleshores: Rang $(B)=2$
- Si $a\neq-1$, aleshores: Rang $(B)=3$

b) $AX=B\rightarrow\begin{pmatrix}4&2&2\\2&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/2\\1/2&-1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9/4&7/2&1/4&-3/2\\5/2&-3&1/2&2\\5/2&-3&1/2&3\end{pmatrix}$

140. Pàgina 33

	Menjar	Rebuts
Setembre	400 €	120 €
Octubre	500 €	180 €
Novembre	350 €	250 €

$A=\begin{pmatrix}400&120\\500&180\\350&250\end{pmatrix}$

141. Pàgina 33

Situem les línies d'autobusos *A*, *B* i *C* per columnes, i els dies *dilluns*, *dimarts* i *dimecres*, per files:

$$M=\begin{pmatrix}5&3&4\\2&1&4\\1&3&5\end{pmatrix}$$

142. Pàgina 33

Matriu fila de costos per unitat: $A=\ 32\quad 46\quad 71$

Matriu fila de vendes per unitat: $B=\ 53\quad 82\quad 140$

Matriu fila de beneficis per unitat: $C=B-A=\ 21\quad 36\quad 69$

Matriu columna d'unitats venudes: $D=\begin{pmatrix}2.100\\1.400\\900\end{pmatrix}$

Benefici anual: $B\cdot D-A\cdot D=\ B-A\ \cdot D=C\cdot D=\ 21\quad 36\quad 69\ \cdot\begin{pmatrix}2.100\\1.400\\900\end{pmatrix}=156.600$

143. Pàgina 33

a) Situem el tipus d'habitació per files (*luxe*, *doble*, *individual*) i l'hotel, per columnes (*Edèn*, *Paradís*, *Spa*):

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

A la segona matriu col·loquem, per files, el tipus d'habitació (*luxe*, *doble*, *individual*) i, a la columna, els diners en euros.

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle Edèn & \scriptstyle Paradís & \scriptstyle Spa \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3.620 & 4.980 & 4.880 \end{pmatrix} \end{array}$$

144. Pàgina 33

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle D & \scriptstyle No\ D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}96 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 12{,}74 \\ 0{,}28 & 13{,}72 \end{pmatrix}$$

El nombre de cargols plans no defectuosos és de 12.740 i el de cargols d'estrella no defectuosos és de 13.720.

145. Pàgina 33

Les columnes representen els productes *X* i *Y*, i les files representen les empreses *A*, *B* i *C*.

Inicialment les empreses rebien: $M = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 \end{pmatrix}$

Aquest mes les empreses han rebut: $N = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix}$

Les disminucions que s'ha produït són: $M - N = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 700 \\ 600 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$

Les disminucions percentuals són: $M - N = \begin{pmatrix} 40\% & 70\% \\ 60\% & 20\% \\ 10\% & 30\% \end{pmatrix}$

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

1. Pàgina 34

Tan sols cal una aresta que uneixi els dos vèrtexs, perquè la representació en forma de graf és independent de la forma real de la carretera.

2. Pàgina 34

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{És una matriu simètrica.}$$

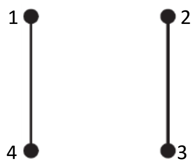
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{És una matriu simètrica.}$$

3. Pàgina 34

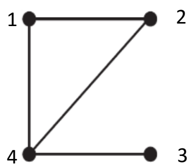
El nombre màxim d'arestes és 4, perquè, si n'hi afegíssim una altra, el vèrtex passaria per segona vegada per algun dels vèrtexs i el camí no seria simple.

4. Pàgina 34

a)



b)



5. Pàgina 34

Calculem la matriu d'adjacència i la seva potència tercera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{24} = 4 \to$ Hi ha 4 camins de longitud 3 arestes.