Límits i continuïtat

6

ACTIVITATS

1. Pàgina 124

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2-1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x^2-1}=1$$

2. Pàgina 124

$$\left|\frac{3x}{x-5}-3\right|=\left|3\left(\frac{x}{x-5}-1\right)\right|=3\left|\frac{5}{x-5}\right|<\varepsilon\to\frac{15}{|x-5|}<\varepsilon\to 15<\varepsilon|x-5|\to|x-5|>\frac{15}{\varepsilon}\to x>\frac{15}{\varepsilon}+5$$

Per a $\varepsilon=0{,}001$:

$$x_0=\frac{15}{0{,}001}+5=15.005$$

Si prenem $x=15.006$:

$$|f(15.006)-3|\approx 0{,}00099<0{,}001$$

3. Pàgina 125

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

4. Pàgina 125

Resposta oberta. Per exemple:

a) $f(x)=x^2-x+1$

b) $f(x)=x-x^2$

c) $f(x)=x^2+x-4$

d) $f(x)=x^3-x$

e) $f(x)=\cos x$

f) $f(x)=1-\sin 2x$

5. Pàgina 126

a) $2+(+\infty)=+\infty$

b) $2+(-\infty)=-\infty$

c) $2\cdot(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

d) $2\cdot(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

6. Pàgina 126

a) $2^{+\infty}+(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

b) $2^{-\infty}+(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

c) $(+\infty)^2+(+\infty)=+\infty$

d) $(-\infty)^2\cdot(+\infty)=+\infty$

7. Pàgina 127

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-8+\infty=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x):g(x)]=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right):\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\dfrac{-8}{+\infty}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=\sqrt[3]{-8}=-2$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{g(x)}=\sqrt[4]{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\sqrt[4]{+\infty}=+\infty$

8. Pàgina 127

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)-\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=-\infty-\dfrac{4}{9}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty)\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[4]{f(x)}=\sqrt[4]{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}=\sqrt[4]{-\infty}$ (No existeix en $\mathbb{R}$)

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$

9. Pàgina 128

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=(+\infty)^5=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=(-\infty)^5=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to-\infty}x}=-\infty$

10. Pàgina 128

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x=5^{-\infty}=\dfrac{1}{5^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{1}{+\infty}}=5^0=1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^x=\left(\sqrt{5}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\sqrt{5}\right)^0=1$

11. Pàgina 129

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+7}{x+13}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x}{x^2+1}=\dfrac{-2}{1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+x}{9+2x^2}=\dfrac{4}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=2$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)^2-x^2}{4-x^2}=\dfrac{1}{-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=-\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=-\infty$

12. Pàgina 129

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+2}{5x-1}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x}\right)^2=\frac{9}{25}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=\frac{9}{25}\cdot(+\infty)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{2x^2+15}\right)^{-3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+15}{x^2-2}\right)^3=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^3=2^3\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{x^6}=8\cdot 1=8$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-3x}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{2x}=\frac{a}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a>0\\ -\infty & \text{si } a<0\end{cases}$

Si $a=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-3x}{2x-1}=-\frac{3}{2}$

d) Si $a\neq-2$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\frac{1}{-(a+2)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{a+2}$

Si $a=-2$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x}=+\infty$

13. Pàgina 130

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}=+\infty$

14. Pàgina 130

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x}=1$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}=\frac{7}{2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}=1$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}=\frac{1}{2}$

15. Pàgina 131

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-3}-\frac{3x^2-1}{1+3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x^3+2x+6x^2-(3x^3-9x^2-x+3)}{x+3x^2-3-9x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{16x^2}{3x^2}\right)=\frac{16}{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^3+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(4x^3+x+1)}{\left(x+\sqrt{4x^3+x+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^3}{\left(\sqrt{4x^3}\right)}=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4x^2+x+1-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-(x^2-2x)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(2\sqrt{x^2}\right)}=1$

16. Pàgina 131

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\dfrac{a}{2}=1\to a=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\dfrac{b}{4}=-\dfrac{1}{4}\to b=-1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\to c=3$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\to d>4$

17. Pàgina 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}-1\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)}=e^2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}-1\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2+4x}{x^2-1}\right)}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{4x}{2x+1}\right)^{x-3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}-1\right)(x-3)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{2x+1}\right)(x-3)}=e^1=e$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3x^2-9}{6x^2+5}\right)^{2x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-1\right)(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-\frac{1}{2}\right)(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-23}{12x^2+10}\right)(2x+1)}=e^0=1$

18. Pàgina 132

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2}{2-x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{-8}=\dfrac{1}{e^8}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^1=e$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^0=1$

19. Pàgina 133

a) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=3$

20. Pàgina 133

a) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$

b) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=2$

c) $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-2$

21. Pàgina 134

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{-1} = -2$

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) $\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{-2+2}{4-1} = 0$

d) $\lim_{x\to \sqrt{2}} f(x) = \frac{\sqrt{2}+2}{1} = \sqrt{2}+2$

22. Pàgina 134

a) $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim_{x\to -1} f(x)$.

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x) = 1+1 = 2$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 + \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1+\infty = +\infty \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1-\infty = -\infty \end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

d) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x+1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} (1+tg(x)) = 1+0 = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

23. Pàgina 135

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2+4x+4)}{(x+2)(x^2-4x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} = \frac{0}{16} = 0$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = \frac{2}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existeix $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}$.

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$

24. Pàgina 135

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=\frac{1}{0}=\infty\to\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}\to\text{No existeix.}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=-\infty\end{matrix}\right\}\to\text{No existeix }\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}.$$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\frac{0}{2}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}}=-\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^{1/2}}=-\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)}=-\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^{1/2}=0$$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}=\frac{\sqrt{6}}{0}=\infty\to\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}\to\text{No existeix.}\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}=-\infty\end{matrix}\right\}\to\text{No existeix }\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{4}$$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}\to\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^{1/2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)(x-2)^{1/2}=0$$

25. Pàgina 136

$\nexists\ f(-2)=\frac{1}{0}$ $\to$ La funció no és contínua en $x=-2$.

$\nexists\ f(2)=\frac{5}{0}$ $\to$ La funció no és contínua en $x=2$.

26. Pàgina 136

Expressem la funció com una funció definida a trossos: $f(x)=\begin{cases}-2(x+1) & \text{si}\quad x\le -1\\ 2(x+1) & \text{si}\quad 1<x\end{cases}$

$f(-1)=2(-1+1)=0\to$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}-2(x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}2(x+1)=0\end{matrix}\right\}\to\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0$$

$f(-1)=0=\lim\limits_{x\to -1}f(x)\to$ La funció és contínua en $x=-1$.

27. Pàgina 137

Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 - x^2 \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{4x-1} \rightarrow f(x)$ no està definida en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. És contínua en $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$.

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x + 1 \rightarrow f(x)$ és contínua en $(2, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow$ Existeix $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1-x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{4x-1} \rightarrow \text{ No existeix.} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 0} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 0$.

Si $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$ Existeix $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4x-1} = \sqrt{7} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x+1 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 2$.

28. Pàgina 137

Si $x < 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, 3)$.

Si $x > 3 \rightarrow f(x) = \frac{x+m}{x} \rightarrow f(x)$ és contínua en $(3, +\infty)$.

Si $x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ Existeix $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-4) = 5 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+m}{x} = 1 + \frac{m}{3}$$

$f(x)$ és contínua en $x = 3$ si:

$$f(3) = 5 = \lim_{x\to 3} f(x) \rightarrow 5 = 1 + \frac{m}{3} \rightarrow m = 12$$

SABER FER

29. Pàgina 138

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0 \rightarrow$ Quan passen molts anys els beneficis queden a zero.

30. Pàgina 138

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) \rightarrow (+\infty - \infty) \rightarrow \text{Indeterminació}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

31. Pàgina 138

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} \to 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}-1\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^3-2}{2+x^4}\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3ax^6}{x^6}} = e^{3a}$$

$$e^{3a} = e^3 \to a = 1$$

32. Pàgina 139

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{3x}}}{\frac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{3x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+7e^{-8x}}{2e^{-8x}-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{-5x}}}{\frac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{-5x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{8x}+7}{2-4e^{8x}} = \frac{7}{2}$$

33. Pàgina 139

$$\lim_{x\to-\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}} = \lim_{x\to-\frac{1}{5}} 2^{\frac{2}{5x+1}} = 2^{\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^-}\dfrac{2x}{5x^2+x} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^-}\dfrac{2}{5x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^+}\dfrac{2x}{5x^2+x} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}^+}\dfrac{2}{5x+1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim_{x\to-\frac{1}{5}}\frac{2x}{5x^2+x} \to \text{No existeix } \lim_{x\to-\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}}.$$

34. Pàgina 139

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to5}\frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} = \lim_{x\to5}\frac{5(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-5} = \lim_{x\to5}5\left(\sqrt{x-1}+2\right) = 20$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{-(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x} = \lim_{x\to1}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right] = -2$$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}{-x-1} = \lim_{x\to-1}\left[-\left(\sqrt{3-x}+2\right)\right] = -4$$

d) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{0}{-2} = 0$

35. Pàgina 140

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=\frac{14-2a}{0}$$

Si $a > 7$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existeix } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a < 7$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existeix } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a = 7$, aleshores:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2-4x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x^2-2x-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8}=-\frac{5}{8}$$

36. Pàgina 140

$f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)-1=-4 \to$ Existeix $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x-2=-5\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2+4x-1=-4\end{array}\right\}\to \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)\to \text{No existex } \lim_{x\to -1} f(x)\to f(x) \text{ és discontinua en } x=-1.$$

37. Pàgina 141

Si $x < 0 \to f(x) = ax^2 + b$

Com que és una funció polinòmica, és contínua en $\mathbb{R}$ i, per tant, en l'interval $(-\infty, 0)$.

Si $0 \le x < 1 \to f(x) = x - a$

Com que és una funció polinòmica, és contínua en $\mathbb{R}$ i, per tant, en l'interval (0, 1).

Si $x \ge 1 \to f(x)=\dfrac{a}{x}+b$

És una funció racional. No està definida en $x = 0$. És contínua en $(1, +\infty)$.

Per a $x = 0 \to f(0)=-a$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax^2+b)=b \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-a)=-a$$

Per a $x = 1 \to f(1)=a+b$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-a)=1-a \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{a}{x}+b\right)=a+b$$

Per a $x = 0 \to f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \to b=-a$

Per a $x = 1 \to f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to a+b=1-a$

$$\left.\begin{array}{l}b=-a\\ a+b=1-a\end{array}\right\}\to 0=1-a\to a=1, b=-1$$

38. Pàgina 141

$P(t)=t^2 \longrightarrow$ Funció polinòmica $\longrightarrow P(t)$ és contínua en (0, 5).

$P(t)=\dfrac{50t-62{,}5}{0{,}5t+5} \longrightarrow$ Definida en $\mathbb{R}-\{-10\} \longrightarrow P(t)$ és contínua en $(5,+\infty)$.

$P(5)=25$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 5^-} P(t)=25\\ \lim\limits_{t\to 5^+} P(t)=25\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{t\to 5} P(t)=25=P(5) \rightarrow$ $P(t)$ és contínua en $t=5$.

Per tant, la funció és contínua en $(0,+\infty)$.

ACTIVITATS

39. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

40. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4}=0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^4}=0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{x^2}=+\infty$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{x^2}=+\infty$

41. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-2}=0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{16}{x-2}=0$

42. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2}=2$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2}=2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2}=-\infty$

43. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2}\right)}=2$$

44. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(0,7)^{3x+2}=(0,7)^{+\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-0,01x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-0,01x^2\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-7)^{2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)^{-x}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)^2-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+4)=-\infty$

45. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\dfrac{6}{2}=3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\dfrac{6}{2}=3$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=+\infty$

46. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

47. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{x}}=e^3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3x-3}{x}\right)}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-3x}{x}}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3+3x}{x}}=e^3$

48. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+2}{2\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2\left(2\sqrt{x^2}\right)}=-1$$

49. Pàgina 142

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3-5}-\sqrt{x^4-3x}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5+3x}{(x+4)\left(\sqrt{x^4+2x^3-5}+\sqrt{x^4-3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=2$$

50. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-x^2+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-(x^2-3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-11}{\sqrt{x^4+3x^2-2}+(x^2-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$$

51. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}}{\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(2\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)}=2$$

52. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2-3x}-\frac{x^2+2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3-2x^3+6x^2}{(x^2-3x)(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2$$

53. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

54. Pàgina 142

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-8}-\sqrt{x^2+mx+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x-15}{\sqrt{x^2+3x-8}+\sqrt{x^2+mx+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{3-m}{2}=-1\rightarrow m=5$$

55. Pàgina 142

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-mx^2+5}{2x^2+\sqrt{4x^4+mx^2-5}}=\frac{-m}{4}=2\rightarrow m=-8$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+m\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-(3x-m)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+4x-(9x^2-6mx+m^2)}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4+6m)x}{6x}=\frac{4+6m}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow m=-\frac{1}{6}$$

56. Pàgina 142

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-6}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+2x}\right)(x-6)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-12}{1+2x}\right)}=e^{1}=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x+2}{x^2+3x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2}{2x^2}\right)}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x}{1+2x^3}\right)^{\frac{x^2-3}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{1+2x^3}\right)\left(\frac{x^2-3}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{6x^3}\right)}=e^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+4x}{4x+7}\right)^{\frac{x^3+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{4x+7}\right)\left(\frac{x^3+1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^3}{4x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)}=e^{-\infty}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+6}{6x+3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6-6x}{6x+3x^2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2}{12x^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^4-2}{(2x^2-1)^2+1}\right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2}\right)\left(\frac{x^3-3x}{x+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^5}{4x^5}\right)}=e^{1}=e$

57. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{+3-mx}{mx+2x^2}\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)}=\dfrac{1}{e}\to\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-mx^2}{2x^2}\right)=-1\to m=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+5x}\right)\left(\frac{x^2-2}{8+mx}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{5mx^2}\right)}=e^{\frac{1}{5m}}=\dfrac{7}{10}\Rightarrow\dfrac{1}{5m}=\ln\left(\dfrac{7}{10}\right)\to m=\dfrac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

58. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+10}{3^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3^x}{3^{x+1}}+\dfrac{10}{3^{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{10}{3^{x+1}}\right)=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}}{3^x+10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot 3}{3^x}=3$

59. Pàgina 143

a) $f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{si } x<-2\\ x+2 & \text{si } -2\le x\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$

b) $f(x)=\begin{cases}x-(3-2x) & \text{si } x<\dfrac{3}{2}\\ x-(-3+2x) & \text{si } x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}3x-3 & \text{si } x<\dfrac{3}{2}\\ -x+3 & \text{si } x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-3)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3)=-\infty$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x<-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2}\leq x<2 \\ \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1<x<3 \\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$

60. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-1$

b) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=4$

d) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

61. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to-3} g(x)=0{,}7$

b) $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to1} g(x)=-2{,}9$

d) $\lim\limits_{x\to2} g(x)=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

62. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to1} 2^{\ln x}=2^{\ln 1}=2^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to e} 2^{\ln x}=2^{\ln e}=2^1=2$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} 2^{\ln x}=2^{\ln\frac{1}{e}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to2} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln 1}=3^0=1$

e) $\lim\limits_{x\to e+1} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln e}=3^1=3$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{e+1}{e}} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln\left(\frac{e+1-e}{e}\right)}=3^{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

63. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{4+1}{\sqrt{4-3}}=5$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{-4+1}{\sqrt{4-3}}=-3$

c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{6+1}{\sqrt{9-3}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$

64. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to4}(\log_2(x-3)+1)=\log_2 1+1=0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to11}(\log_2(x-3)+1)=\log_2(8)+1=3+1=4$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{7}{2}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{13}{4}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right)+1=-2+1=-1$

65. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{\frac{-7}{4}}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\frac{4}{7}+2=\frac{10}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{6}+\log_{\frac{1}{2}}8=\frac{1}{6}-3=-\frac{17}{6}$

66. Pàgina 143

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=3$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{-18}{0}\to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existeix $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=1$

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{12}{0}\to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existeix $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

67. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)+n(x)+p(x))=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)\cdot n(x)-p(x))=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x)\cdot p(x))=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{n(x)}{m(x)}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{m(x)}{n(x)}=\frac{4}{0}\to$ Indeterminació

f) $\lim\limits_{x\to 5}(n(x)\cdot p(x))=0\cdot(+\infty)\to$ Indeterminació

g) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{p(x)}{m(x)}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{n(x)}{p(x)}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x))^{n(x)}=1$

j) $\lim\limits_{x\to 5}(m(x))^{p(x)}=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 5}(n(x))^{p(x)}=0$

l) $\lim\limits_{x\to 5}(p(x))^{n(x)}=(+\infty)^0\to$ Indeterminació

68. Pàgina 143

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=1$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}g(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}g(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}h(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^-}h(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+}h(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}m(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-}m(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^+}m(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}m(x)=+\infty$

69. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$ c) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$

70. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x^2-9} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x^2-9} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

71. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-4x+1}.$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(x-3)^2}.$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \frac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \frac{(3x-5)(x+2)}{(3x-5)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \frac{x+2}{3x-5} = \frac{\frac{11}{3}}{0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^-} \frac{x+2}{3x-5} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^+} \frac{x+2}{3x-5} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \frac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25}.$

72. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x-2x^2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{-x(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{-x}=-2$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(2x+3)}=\frac{1}{5}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=-\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2}=-\frac{6}{5}$

e) $\lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{3x^2+x-10}{9x-15}=\lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{(3x-5)(x+2)}{3(3x-5)}=\lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{x+2}{3}=\frac{11}{9}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^3-2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^3(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{1-2x}=5$

73. Pàgina 144

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-3}=-2$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x}=\frac{-2}{0}=\infty\to\left.\lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{x}=-\infty\right\}\to$ No existeix $\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2-1}{x^2}$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-3x^2}{3x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4-3x)}{x(3+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-3x}{3+x}=\frac{4}{3}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{4+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4+2x}=-\frac{1}{4}$

e) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x^3-3}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^3-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^3-3}=\frac{4}{5}$

f) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2-x-5}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{-4}{0}=\infty\to$

$\left.\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=+\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=-\infty\right\}\to$ No existeix $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$.

74. Pàgina 144

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{6}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)=4$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}=\lim_{x\to 3}(2\sqrt{x}+2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x+3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=-\dfrac{1}{12}$

75. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2}=24$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+5}{8x-\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(x+1)\left(8x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{55x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{55x^2}{55x^2}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-(x-4)}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{(x+4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=-\dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left[(1-x)\sqrt{x+1}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{3}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)\sqrt{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}}=0$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)=1$

76. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{-6}{-18}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{12}{-4}=-3$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(2x^2-7x-3)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{19}{0}=\infty\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No existeix } \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)(x-3)(2x-1)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x+2}=1$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=2$

77. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3} = \frac{4}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3} = -\frac{4}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \frac{6}{\sqrt{7}-8} = \frac{6\left(\sqrt{7}+8\right)}{-57} = -\frac{2\sqrt{7}+16}{19}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{-2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{-2} = +\infty$

78. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[6]{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \to \text{No existeix.} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existeix } \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = -\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \left(\sqrt{x}+3\right) = 6$

79. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2+\frac{1}{x^4}\right) = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2+\frac{1}{x^4}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2+\frac{1}{x^4}\right) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} \left(2+\frac{1}{x^4}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x-3} = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}=1^0=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x-3}\right)^{4x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4x-3}\right)(4x^2-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x-3}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+3}{3x}\right)^{3x}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x+5}\right)(x)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x}{x+5}}=e^{-5}=\dfrac{1}{e^5}$

80. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+2}\right)^{-x^2+3}=3^{-\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+3x}\right)^{x^2+4}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2-3x}{x^2+3x}\right)(x^2+4)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)}=e^{-\infty}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3x^2-1}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^3}\right)}=e^0=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3+2x}\right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{3+2x}\right)\left(\frac{2x^2-1}{1+3x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-12x^2}{6x^2}\right)}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+x^2}{x^2-6x-2}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8x+2}{x^2-6x-2}\right)\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^4}{x^4}\right)}=e^{-8}=\dfrac{1}{e^8}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{\dfrac{7x^2+1}{2+7x^2}}\right)^{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x^2+1}{2+7x^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2+7x^2}\right)\left(\frac{x^2+3}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{7x^3}\right)}=e^0=1$

81. Pàgina 144

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[(\cos^2 x)-1]\left(\frac{1}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x)-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x)}=e^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(2x)\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}\right)}=e^2$

82. Pàgina 144

Si $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-ax+3}{x-3}\neq\infty\to$ $(x-3)$ divideix x^2-ax+3 $\to 3^2-3a+3=0\to a=\dfrac{12}{3}=4$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=2$

83. Pàgina 145

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-ax+3}{x^2+1}=\dfrac{7+2a}{5}=5\to 2a=25-7\to a=9$