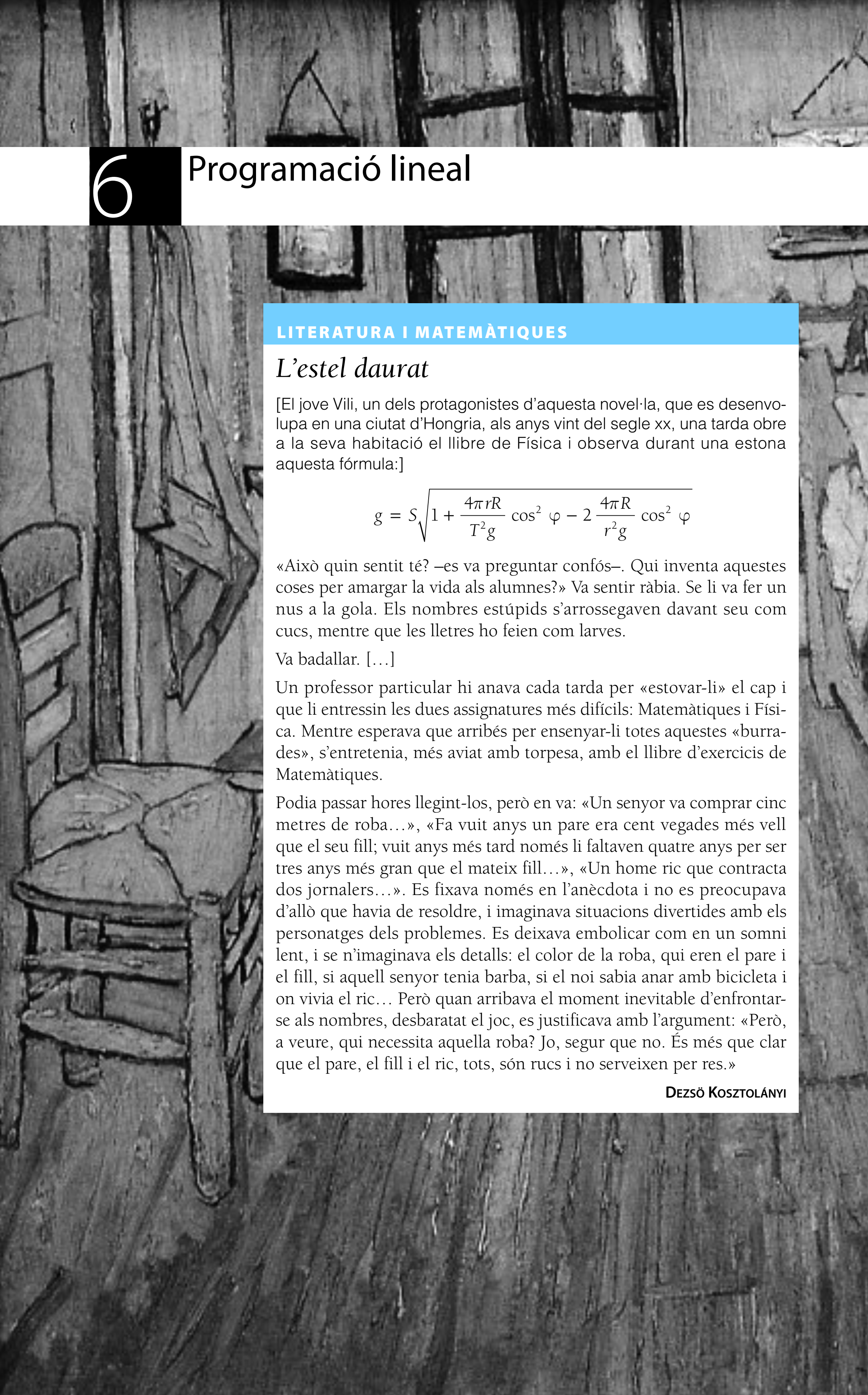


# 6 Programació lineal

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

## *L'estel daurat*

[El jove Vili, un dels protagonistes d'aquesta novel·la, que es desenvolupa en una ciutat d'Hongria, als anys vint del segle XX, una tarda obre a la seva habitació el llibre de Física i observa durant una estona aquesta fórmula:]

$$g = S\sqrt{1 + \frac{4\pi rR}{T^2 g}\cos^2\varphi - 2\frac{4\pi R}{r^2 g}\cos^2\varphi}$$

«Això quin sentit té? –es va preguntar confós–. Qui inventa aquestes coses per amargar la vida als alumnes?» Va sentir ràbia. Se li va fer un nus a la gola. Els nombres estúpids s'arrossegaven davant seu com cucs, mentre que les lletres ho feien com larves.

Va badallar. […]

Un professor particular hi anava cada tarda per «estovar-li» el cap i que li entressin les dues assignatures més difícils: Matemàtiques i Física. Mentre esperava que arribés per ensenyar-li totes aquestes «burrades», s'entretenia, més aviat amb torpesa, amb el llibre d'exercicis de Matemàtiques.

Podia passar hores llegint-los, però en va: «Un senyor va comprar cinc metres de roba…», «Fa vuit anys un pare era cent vegades més vell que el seu fill; vuit anys més tard només li faltaven quatre anys per ser tres anys més gran que el mateix fill…», «Un home ric que contracta dos jornalers…». Es fixava només en l'anècdota i no es preocupava d'allò que havia de resoldre, i imaginava situacions divertides amb els personatges dels problemes. Es deixava embolicar com en un somni lent, i se n'imaginava els detalls: el color de la roba, qui eren el pare i el fill, si aquell senyor tenia barba, si el noi sabia anar amb bicicleta i on vivia el ric… Però quan arribava el moment inevitable d'enfrontar-se als nombres, desbaratat el joc, es justificava amb l'argument: «Però, a veure, qui necessita aquella roba? Jo, segur que no. És més que clar que el pare, el fill i el ric, tots, són rucs i no serveixen per res.»

DEZSÖ KOSZTOLÁNYI

# L'estel daurat

**Dezsö Kosztolányi**

A en Vili, el jove protagonista d'aquesta novel·la, que es desenvolupa en una ciutat d'Hongria, als anys vint del segle XX, no li agraden les matemàtiques ni la física. El seu professor d'aquestes assignatures, Antal Novák, està preocupat perquè en Vili no ha après res del que ha explicat durant el curs. A l'última classe mira de repassar abans de l'examen final i li demana que parli de qualsevol tema. En Vili tria el tema de les variacions.

–Tracem una recta –va dir en Vili i va assenyalar la pissarra amb la idea d'aprofitar el passeig fins a la tarima per moure els músculs.

–Com vulgui –va contestar en Novák, sorprès–. Traci aquesta recta. Però no aquí, sinó mentalment.

–Que sigui *AB*.

–O bé *CD* –va proposar, contrariat, en Novák; ja veia que el xicot no tenia ni idea del que parlava.

En Vili li seguia la veta i s'aferrava a les seves paraules com a un salvavides.

–Doncs que sigui *CD* –va repetir.

–O bé *XY* –va suggerir el professor, per complicar-ho encara més.

–O bé *XY* –va cedir en Vili.

–Però què és el que vol fer amb aquesta recta? –va exclamar finalment en Novák–. Per a què vol utilitzar la recta en les variacions? Definitivament, no ho entenc pas. […]

El professor va proposar un altre exercici: traçar una perpendicular a un pla oblic. En Vili repetia com un lloro, però quan en Novák l'interrogava, es quedava mut, desemparat, sense saber què dir.

Aclaparat per tanta incomprensió, en Novák es va prometre a si mateix que, per molt que li costés, aconseguiria que aquell noi aprengués. […] En Vili es mirava el professor i pensava: «Per a ell és tan fàcil.» Però en lloc de visualitzar la imatge del pla inclinat i la línia perpendicular, conceptes que li eren totalment aliens, només veia els moviments bruscos del professor, que gesticulava com un saltimbanqui: els seus dits, els seus anells inclòs el de cornalina, voletejaven en l'aire. Les abstraccions no eren el fort d'en Vili. Només li resultava intel·ligible la realitat més immediata, el món visible i palpable.

Expressa algebraicament aquest problema:

**«Una fàbrica vol elaborar un nou tipus de pastís amb dos productes *A* i *B*. El primer conté un 70 % de greixos i un 15 % d'hidrats de carboni, mentre que el segon conté un 12 % de greixos i un 80 % d'hidrats de carboni. El pastís ha de contenir, almenys, 40 g de greixos i 90 g d'hidrats de carboni. El cost del producte *A* és de 0,05 €/g i el del producte *B* és de 0,02 €/g. Quants grams de cada producte ha de tenir el pastís perquè el cost sigui mínim?»**

$x \rightarrow$ Quantitat del producte $A$

$y \rightarrow$ Quantitat del producte $B$

Es tracta de fer mínim el cost que està determinat per la funció $f(x, y) = 0{,}05x + 0{,}02y$.

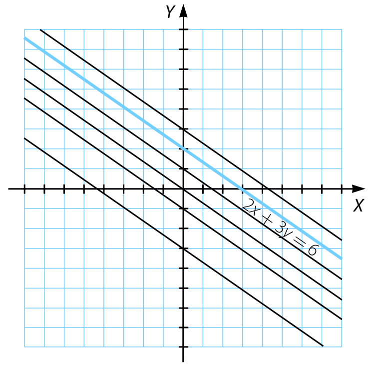
I ha de complir aquestes condicions:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}70x + 0{,}12y \geq 40 \\ 0{,}15x + 0{,}80y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

# Programació lineal

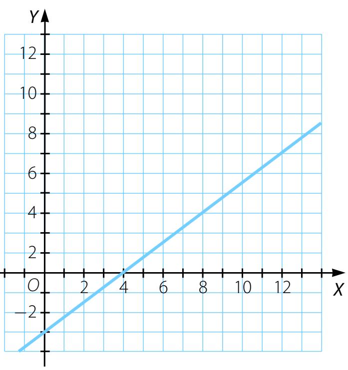
## ABANS DE COMENÇAR… RECORDA

001 Dibuixa la recta $2x + 3y = 6$ i totes les rectes paral·leles a ella.




002 Dibuixa el conjunt de punts del pla que fan que la funció $f(x, y) = 3x - 4y$ prengui el valor 12.

És la recta d'equació $3x - 4y = 12$.




003 Donada la funció $f(x, y) = x + y$, esbrina en quins punts assoleix el màxim amb les restriccions següents:

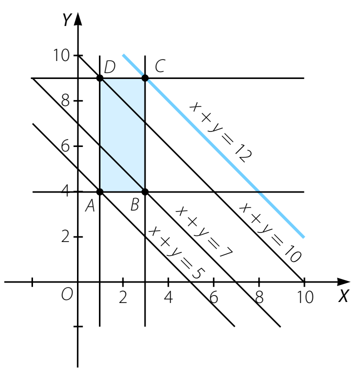
$$1 \leq x \leq 3 \text{ i } 4 \leq y \leq 9$$

Les restriccions ens donen un rectangle.

En els vèrtexs d'aquest rectangle, la funció $f(x, y) = x + y$ assoleix els valors següents:

$f(A(1, 4)) = 1 + 4 = 5$
$f(B(3, 4)) = 3 + 4 = 7$
$f(C(1, 9)) = 1 + 9 = 10$
$f(D(3, 9)) = 3 + 9 = 12$

El màxim s'assoleix al punt $C(3, 9)$.



## ACTIVITATS

001 **Planteja aquest problema: «Tenim com a màxim 120 unitats de dos productes, *A* i *B*. Hi ha 65 unitats del *A*, amb uns guanys de 4 €, i 55 del *B*, amb 6,50 € per unitat. Determina les quantitats que es venen per maximitzar els beneficis.»**

$x \rightarrow$ nre. d'unitats del producte *A*
$y \rightarrow$ nre. d'unitats del producte *B*

| | Producte *A* | Producte *B* |
|---|---|---|
| Guanys per unitat (€) | 4 | 6,50 |

$\rightarrow f(x, y) = 4x + 6{,}50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 4x + 6{,}50y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65 \\ 0 \leq y \leq 55 \\ x + y \leq 120 \end{array}\right\}$

002 **Planteja: «Tenim taules de tipus *A* amb 2 m² de fusta, 1 hora de feina i un benefici de 80 € cada una, i de tipus *B* amb 1 m² de fusta, 3 hores de feina i 50 € de benefici. Si hi ha 600 m² de fusta i un màxim de 900 hores, determina com obtenir el benefici màxim.»**

$x \rightarrow$ nre. de taules de tipus *A*
$y \rightarrow$ nre. de taules de tipus *B*

| | Tipus *A* | Tipus *B* | Total |
|---|---|---|---|
| Fusta (m²) | 2 | 1 | 600 |
| Feina (hores) | 1 | 3 | 900 |
| Benefici (€) | 80 | 50 | |

$\rightarrow 2x + y \leq 600$
$\rightarrow x + 3y \leq 900$
$\rightarrow f(x, y) = 80x + 50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 80x + 50y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

003 **Disposem de 90.000 m² per construir parcel·les de 3.000 i 5.000 m², tipus *A* i *B*. Els beneficis són de 10.000 € per cada parcel·la *A* i de 20.000 € per cada parcel·la *B*. El nombre màxim de parcel·les *B* és de 120, i el de parcel·les *A* és 150. Determina quantes parcel·les de cada tipus necessitem per obtenir beneficis màxims.**

$x \rightarrow$ nre. de parcel·les de tipus *A*
$y \rightarrow$ nre. de parcel·les de tipus *B*

| | Parcel·les tipus *A* | Parcel·les tipus *B* |
|---|---|---|
| Mida (m²) | 3.000 | 5.000 |
| Total parcel·les | 150 | 120 |
| Benefici (€) | 10.000 | 20.000 |

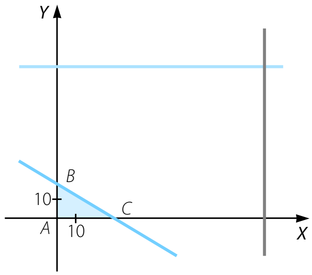
$\rightarrow 3.000x + 5.000y \leq 90.000$
$\rightarrow 0 \leq x \leq 150; 0 \leq y \leq 120$
$\rightarrow f(x, y) = 10.000x + 20.000y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 10.000x + 20.000y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 3.000x + 5.000y \leq 90.000 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 120 \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$, $B(0, 18)$ i $C(30, 0)$.




Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 360.000$ i $f(C) = 300.000$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $B$, cosa que significa que per obtenir el màxim benefici, 360.000 €, cal construir 18 parcel·les de tipus $B$ i cap parcel·la de tipus $A$.

**004** **Volem invertir en dos productes financers *A* i *B*. La inversió en *B* serà, almenys, de 3.000 € i no s'invertirà en *A* més del doble que en *B*. El producte *A* proporciona un benefici del 10 %, i el *B* del 5 %. Si disposem d'un màxim de 12.000 €, quant hem d'invertir en cada producte per maximitzar el benefici?**

$x \rightarrow$ quantitat de diners invertits en el producte financer $A$

$y \rightarrow$ quantitat de diners invertits en el producte financer $B$

| | Producte financer *A* | Producte financer *B* |
|---|---|---|
| Benefici (€) | 0,10 | 0,05 |

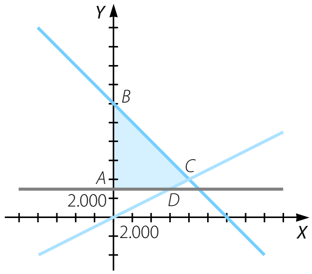
$\rightarrow f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}05y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}05y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 12.000 \\ 3.000 \leq y \\ 0 \leq x \leq 2y \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 3.000)$; $B(0, 12.000)$; $C(8.000, 4.000)$ i $D(6.000, 3.000)$.




Com que $f(A) = 150$, $f(B) = 600$, $f(C) = 1.000$ i $f(D) = 750$, el màxim s'aconsegueix en $C$. És a dir, hem d'invertir 8.000 € en el producte $A$ i 4.000 € en el producte $B$ per obtenir un benefici màxim de 1.000 €.

005 **Es fabriquen dos tipus d'aparells *A* i *B* als tallers *X* i *Y*. En cada un dels tallers es treballen 100 hores a la setmana. Cada aparell *A* necessita 3 hores del taller *X* i 1 hora de *Y*, i cada aparell *B*, 1 i 2 hores, respectivament. Cada aparell *A* es ven a 100 € i cada aparell *B* a 150 €. Calcula gràficament el nombre d'aparells de cada tipus que s'han de produir perquè la facturació sigui màxima.**

$x \rightarrow$ nombre d'aparells de tipus *A*

$y \rightarrow$ nombre d'aparells de tipus *B*

| | Tipus *A* | Tipus *B* | Hores treballades | |
|---|---|---|---|---|
| Taller *X* (hores) | 3 | 1 | 100 | $\rightarrow 3x + y \leq 100$ |
| Taller *Y* (hores) | 1 | 2 | 100 | $\rightarrow x + 2y \leq 100$ |
| Preu per aparell (€) | 100 | 150 | | $\rightarrow f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow$ Funció objectiu |

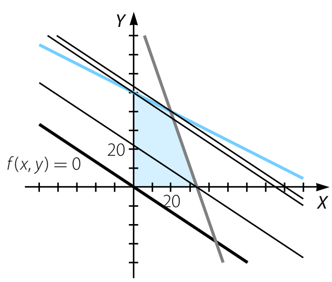
Maximitzar $f(x, y) = 100x + 150y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 50)$; $C(20, 40)$ i $D\left(\dfrac{100}{3}, 0\right)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per cadascun dels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en *C*. Així doncs, cal produir 20 aparells de tipus *A* i 40 aparells de tipus *B* per obtenir un benefici màxim de 8.000 €.




006 **Tenim 120 refrescos de taronja i 180 de llimona. Es venen en paquets de dos tipus: els paquets de tipus *A* contenen 3 refrescos de taronja i 3 de llimona, i els de tipus *B* contenen 2 refrescos de taronja i 4 de llimona. El benefici és de 6 € per cada paquet de tipus *A* i 5 € per cada paquet de tipus *B*. Troba, gràficament, quants paquets de cada tipus han de vendre per maximitzar el beneficis.**

$x \rightarrow$ nre. de paquets de tipus *A*

$y \rightarrow$ nre. de paquets de tipus *B*

| | Paquets tipus *A* | Paquets tipus *B* | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Taronja | 3 | 2 | 120 | $\rightarrow 3x + 2y \leq 120$ |
| Llimona | 3 | 4 | 180 | $\rightarrow 3x + 4y \leq 180$ |
| Benefici (€) | 6 | 5 | | $\rightarrow f(x, y) = 6x + 5y \rightarrow$ Funció objectiu |

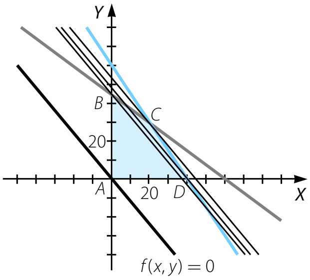
Maximitzar $f(x, y) = 6x + 5y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 45)$; $C(20, 30)$ i $D(40, 0)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en $C$. Així doncs, cal vendre 20 paquets de tipus $A$ i 30 paquets de tipus $B$ perquè el benefici màxim sigui de 270 €.




007 Resol aquest problema de programació lineal:

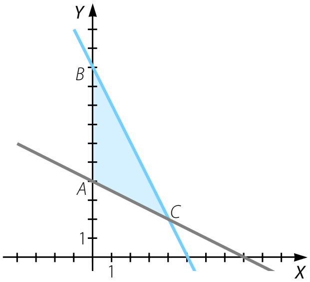
Maximitzar $f(x, y) = x - 2y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{r} x + 2y \geq 8 \\ -2x - y \geq -10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 4)$; $B(0, 10)$ i $C(4, 2)$.

Com que $f(A) = -8$, $f(B) = -20$ i $f(C) = 0$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $C$, amb valor 0.




008 **Resol el problema de programació lineal:**

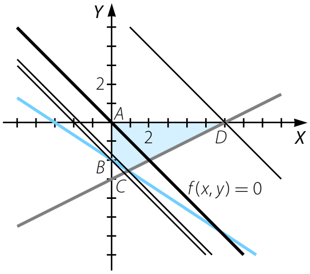
Maximitzar $f(x, y) = x + y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{r} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Tracem paral·leles que passin per $A(0, 0)$; $B(0, -2)$; $C\left(\frac{6}{7}, \frac{-18}{7}\right)$ i $D(6, 0)$.

El màxim s'aconsegueix en $D$ i val 6.



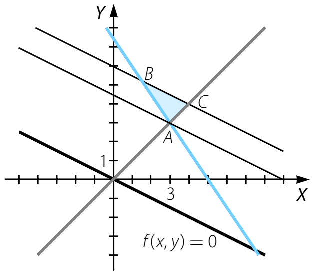

009 Resol aquest problema de programació lineal:

Maximitzar $f(x, y) = 2x + 4y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 12 \\ x - y \leq 0 \\ 6x + 4y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Tracem paral·leles que passin per $A(3, 3)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$ i $C(4, 4)$.



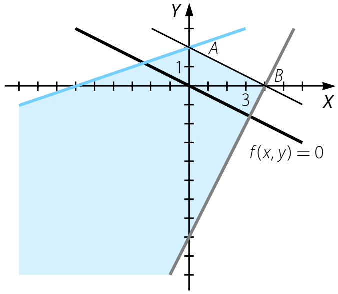

El màxim s'aconsegueix en $B$ i $C$ i, per tant, s'obté en tots els punts del segment $BC$.

010 **Resuelve el siguiente problema de programación lineal:**

Maximitzar $f(x, y) = 3x + 6y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{r} -x + 3y \leq 6 \\ 2x - y \leq 8 \\ x + 2y \leq 4 \end{array}\right\}$

La regió factible no està acotada. Té dos vèrtexs: $A(0, 2)$ i $B(4, 0)$.



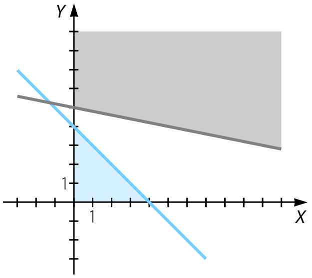

La funció objectiu aconsegueix el màxim en els vèrtexs $A$ i $B$ i, per tant, en tots els punts del segment que uneix $A$ amb $B$, i el valor és 12.

011 **Resol aquest problema de programació lineal:**

Maximitzar $f(x, y) = -x + 3y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

El sistema d'inequacions $\left.\begin{array}{l} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \end{array}\right\}$ no té solució en el primer quadrant; així doncs, no hi ha regió factible per al conjunt de restriccions de l'enunciat. El problema no té solució.



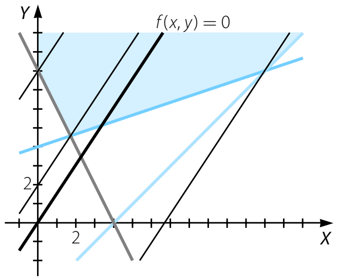
012 **Resol aquest problema de programació lineal:**

$$\text{Maximitzar} \quad f(x, y) = 3x - 2y$$

$$\text{Subjecte a} \quad \left.\begin{array}{l} -x + 3y \geq 12 \\ 2x + \ \ y \geq 8 \\ \ \ x - \ \ y \leq 4 \\ \ \ x \geq 0 \\ \ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La regió factible no està acotada. Si tracem rectes paral·leles a $3x - 2y = 0$, comprovem que sempre podem traçar una recta paral·lela per damunt de l'anterior que talli la regió factible.

El problema no té solució.




013 **Una fàbrica elabora dos tipus de productes, *A* i *B*. El tipus *A* necessita 2 obrers que treballin un total de 20 hores, i s'obté un benefici de 1.500 € per unitat. El tipus *B* necessita 3 obrers amb un total de 10 hores de feina i el benefici és de 1.000 € per unitat. Si disposen de 60 obrers i 480 hores de feina, determina la quantitat d'unitats de A i de *B* que s'han de fabricar per maximitzar el benefici.**

$x \longrightarrow$ nre. d'unitats del producte de tipus *A*
$y \longrightarrow$ nre. d'unitats del producte de tipus *B*

| | Tipus *A* | Tipus *B* | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Obrers | 2 | 3 | 60 | $\rightarrow \ 2x + \ 3y \leq 60$ |
| Temps (hores) | 20 | 10 | 480 | $\rightarrow 20x + 10y \leq 480$ |
| Benefici per unitat (€) | 1.500 | 1.000 | | $\longrightarrow f(x, y) = 1.500x + 1.000y \longrightarrow$ Funció objectiu |

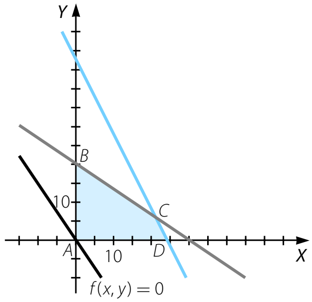
$$\text{Maximitzar} \quad f(x, y) = 1.500x + 1.000y$$

$$\text{Subjecte a} \quad \left.\begin{array}{l} \ \ 2x + \ \ 3y \leq 60 \\ 20x + 10y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 20)$; $C(21, 6)$ i $D(24, 0)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 20.000$, $f(C) = 37.500$ i $f(D) = 36.000$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex *C*. Així doncs, cal fabricar 21 unitats de tipus *A* i 6 unitats de tipus *B* perquè el benefici sigui màxim i valgui 37.500 €.




014 **Una fàbrica de conserva té 800 kg de pèsols per conservar en dos tipus de llaunes. La llauna petita en conté 200 g i aporta un benefici de 10 cèntims per llauna. La llauna gran en conté 500 g i aporta un benefici de 30 cèntims. Si al magatzem només tenen 2.000 llaunes de mida petita i 1.000 de grans, determina la quantitat de llaunes de cada mida que hem de produir per maximitzar el benefici.**

$x \rightarrow$ nre. de llaunes petites $\qquad y \rightarrow$ nre. de llaunes grans

| | Llauna petita | Llauna gran | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Quantitat de pèsols (kg) | 0,2 | 0,5 | 800 | $\rightarrow 0{,}2x + 0{,}5y \leq 800$ |
| Total llaunes | 2.000 | 1.000 | | $\rightarrow x \leq 2.000;\ y \leq 1.000$ |
| Benefici per unitat (€) | 0,10 | 0,30 | | $\rightarrow f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}5y \rightarrow$ Funció objectiu |

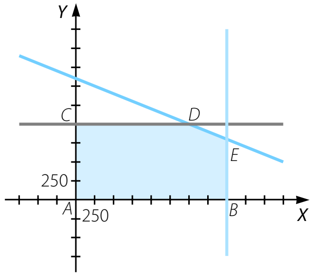
Maximitzar $\quad f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}5y$

Subjecte a $\quad \left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2.000 \\ 0 \leq y \leq 1.000 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(2.000, 0)$; $C(0, 1.000)$; $D(1.500, 1.000)$ i $E(2.000, 800)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 200$, $f(C) = 300$, $f(D) = 450$ i $f(E) = 440$, el valor màxim s'aconsegueix en el punt $D$. Per tant, hem de fabricar 1.500 llaunes petites i 1.000 llaunes grans per maximitzar el benefici i que sigui de 450 €.



**015** **Un esportista necessita consumir diàriament 36 g d'una substància *M*, 24 g de *N* i 8 g de *P*. A la farmàcia ha trobat dos tipus de càpsules que contenen aquestes substàncies. Les càpsules *A* tenen 6 g de *M*, 2 g de *N* i 18 g de *P*, i costen 3 cèntims per càpsula. Les càpsules *B* tenen 3 g de *M*, 4 g de *N* i 18 g de *P*, i costen 4,5 cèntims per càpsula. Quantes càpsules de cada tipus necessita perquè el cost sigui mínim?**

$x \rightarrow$ nre. de càpsules de tipus *A*

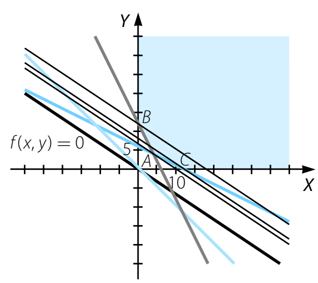
$y \rightarrow$ nre. de càpsules de tipus *B*

| | Càpsula *A* | Càpsula *B* | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Substància *M* (g) | 6 | 3 | 36 | $\rightarrow 6x + 3y \geq 36$ |
| Substància *N* (g) | 2 | 4 | 24 | $\rightarrow 2x + 4y \geq 24$ |
| Substància *P* (g) | 18 | 18 | 8 | $\rightarrow 18x + 18y \geq 8$ |
| Cost per càpsula (cèntims) | 3 | 4,5 | | $\longrightarrow f(x, y) = 3x + 4{,}5y \rightarrow$ Funció objectiu |

Minimitzar $f(x, y) = 3x + 4{,}5y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{r} 6x + \ \ 3y \geq 36 \\ 2x + \ \ 4y \geq 24 \\ 18x + 18y \geq 8 \\ 0 \leq x \quad\quad \\ 0 \leq y \quad\quad \end{array}\right\}$$

La regió factible no està acotada per la part superior i té tres vèrtexs: $A(4, 4)$, $B(0, 12)$ i $C(12, 0)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu comprovem que el mínim s'aconsegueix en *A*. Així doncs, un esportista necessita 4 càpsules de cada tipus perquè el cost sigui mínim, i aquest cost és de 30 cèntims.




**016** **Els animals d'una granja han de prendre, almenys, 60 mg de vitamina A i, almenys, 90 mg de vitamina B. Existeixen dos compostos amb aquestes vitamines. El compost *X* conté 10 mg de vitamina A i 15 mg de B, i cada dosi val 0,50 €. El compost *Y* conté 10 mg de cada vitamina, i cada dosi costa 0,30 €. A més, es recomana no prendre'n més de 8 dosis diàries. Calcula quines dosis han de prendre perquè el cost sigui mínim.**

$x \rightarrow$ nre. de dosis del compost *X*

$y \rightarrow$ nre. de dosis del compost *Y*

| | Compost *X* | Compost *Y* | Quantitat | |
|---|---|---|---|---|
| Vitamina A (mg) | 10 | 10 | 60 | $\rightarrow 10x + 10y \geq 60$ |
| Vitamina B (mg) | 15 | 10 | 90 | $\rightarrow 15x + 10y \geq 90$ |
| Cost (€) | 0,50 | 0,30 | | $\longrightarrow f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}30y \rightarrow$ Funció objectiu |

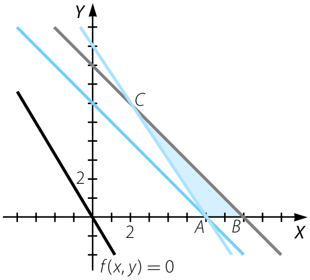
Minimitzar $f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}30y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} x + \quad y \le 8 \\ 10x + 10y \ge 60 \\ 15x + 10y \ge 90 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(6, 0)$; $B(8, 0)$ i $C(2, 6)$.

Si substituïm a la funció objectiu obtenim que $f(A) = 3$, $f(B) = 4$ i $f(C) = 2{,}8$; així doncs, el mínim s'aconsegueix en el punt $C$.
Per tant, els animals han de prendre 2 dosis del compost $X$ i 6 dosis del compost $Y$ perquè el cost sigui mínim, cost que és de 2,80 €.




017 **Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus *A* té 1 formatge i 2 ampolles de vi, i transportar-lo costa 0,90 €. El lot de tipus *B* té 3 formatges i 1 ampolla de vi, i el transport val 1,50 €. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 ampolles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus *A* i 25 del tipus *B*. Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?**

$x \rightarrow$ nre. de lots de tipus $A$ $\qquad$ $y \rightarrow$ nre. de lots de tipus $B$

| | Lot tipus *A* | Lot tipus *B* | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Formatge | 1 | 3 | 200 | $\rightarrow x + 3y \le 200$ |
| Ampolles de vi | 2 | 1 | 100 | $\rightarrow 2x + y \le 100$ |
| Cost del transport (€) | 0,90 | 1,50 | | $\rightarrow f(x, y) = 0{,}90x + 1{,}50y \rightarrow$ Funció objectiu |

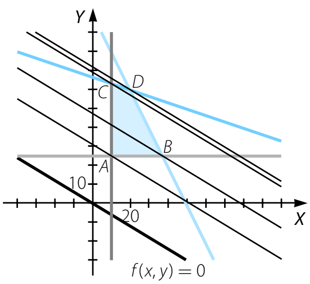
Minimitzar $f(x, y) = 0{,}90x + 1{,}50y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} x + 3y \le 200 \\ 2x + \quad y \le 100 \\ 10 \le x \\ 25 \le y \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(10, 25)$; $B\left(\dfrac{75}{2}, 25\right)$; $C\left(10, \dfrac{190}{3}\right)$ i $D(20, 60)$.

Com que $f(A) = 46{,}5$, $f(B) = 71{,}25$, $f(C) = 104$ i $f(D) = 108$, el mínim s'aconsegueix en $A$, amb un valor de 46,5. És a dir, perquè les despeses, del transport siguin mínimes han d'elaborar 10 lots de tipus $A$ i 25 lots de tipus $B$, amb unes despeses totals de 46,50 €.



018 **Aquesta és la composició dels articles *A* i *B* pels elements M1, M2 i M3.**

| | *A* | *B* |
|---|---|---|
| M1 | 2 | 1 |
| M2 | 3 | 2 |
| M3 | 1 | 2 |

**Necessitem, almenys, 45 unitats de M1, 71 de M2 i 25 de M3, i els costos de trasllat de *A* i *B* són 50 € i 60 €, respectivament. Determina els articles que s'han d'elaborar perquè els costos de trasllat siguin mínims.**

$x \rightarrow$ nre. d'articles *A*
$y \rightarrow$ nre. d'articles *B*

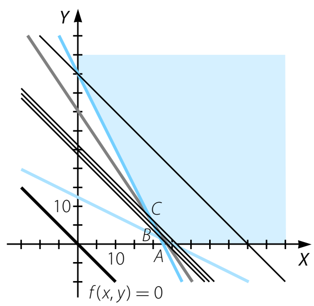
Minimitzar $\quad f(x, y) = 50x + 60y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + \phantom{2}y \geq 45 \\ 3x + 2y \geq 71 \\ \phantom{3}x + 2y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La regió factible no està acotada.

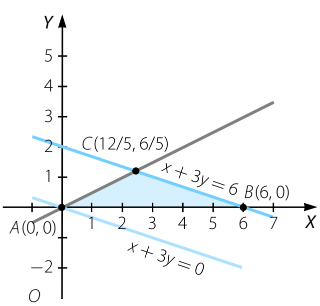
Vèrtexs: $A(25, 0)$; $B(23, 1)$; $C(19, 7)$ i $D(0, 45)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en *B*. Això significa que perquè els costos de trasllat siguin mínims s'han d'elaborar 23 articles *A* i 1 article *B*. En aquest cas, el cost serà de 1.200 €.




019 **Determina la solució òptima de la funció $f(x, y) = x + 3y$ sotmesa al conjunt d'inequacions següent:**

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 2x + 6y \leq 12 \qquad x \geq 2y$$

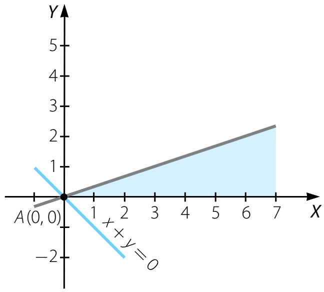



La solució és:

- El segment *BC* per al màxim: per a qualsevol punt *P* del segment es compleix que $f(P) = f(B) = f(C) = 6$.
- El punt *A* és el mínim $f(A) = 0$.

020 Determina la solució òptima de la funció $f(x, y) = x + y$ sotmesa al conjunt d'inequacions següent:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x - 6y \leq 12 \qquad x \geq 3y$$




No hi màxim (és una regió oberta) i el mínim s'assoleix en el punt $A(0, 0)$.

021 El premi d'un concurs consisteix en un xec de 240 € per gastar en llibres i jocs. Els llibres valen 8 €, i els jocs, 24 €. L'organització estableix la condició que el nombre de llibres que compri el guanyador no pot superar el doble del nombre de jocs.

a) Planteja un sistema d'inequacions amb les restriccions i representa la regió factible.
b) Determina, de manera raonada, si el guanyador podria comprar 12 llibres i 6 jocs.
c) Podria comprar 7 llibres i 7 jocs? En cas que li sobressin diners, quants n'hi sobrarien?

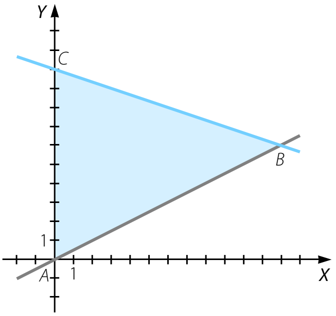
a) $x \rightarrow$ nombre de llibres $\qquad y \rightarrow$ nombre de jocs

| | Llibres | Jocs | Total |
|---|---|---|---|
| Cost (€) | 8 | 24 | 240 |

$\rightarrow 8x + 24y \leq 240$

El sistema d'inequacions que hem de resoldre és:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$




La regió factible està acotada i els vèrtexs són $A(0, 0)$; $B(12, 6)$ i $C(0, 10)$.

b) Els vèrtexs pertanyen a la regió factible, perquè a les inequacions es dóna la igualtat. El punt $B$ representa 12 llibres i 6 jocs i, per tant, sí que els podria comprar.

c) Sí que podria comprar 7 llibres i 7 jocs, perquè el punt (7, 7) pertany a la regió factible. El cost serà de 224 € i li sobraran 16 €.

**022** **Una empresa té dos centres de producció. Un genera diàriament 1 tona de material altament radioactiu, 3 de radiació mitjana i 5 de baixa radiació. L'altre centre genera cada dia 2 tones de cada tipus. L'empresa ha de reciclar, almenys, 80 tones de material altament radioactiu, 160 de radiació mitjana i 200 de baixa radiació. Si el cost diari de l'operació és de 20.000 € en cada centre, quants dies s'ha de dur a terme perquè el cost de l'operació sigui mínim?**

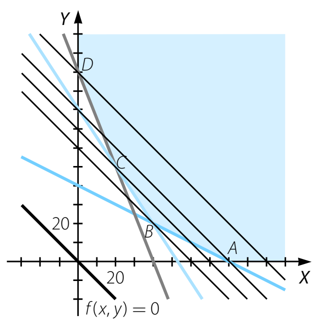
$x \longrightarrow$ nre. de dies que ha de reciclar el primer centre de producció

$y \longrightarrow$ nre. de dies que ha de reciclar el segon centre de producció

| | Primer centre | Segon centre | Total reciclat | |
|---|---|---|---|---|
| Radiació alta (tones) | 1 | 2 | 80 | $\longrightarrow \quad x + 2y \geq 80$ |
| Radiació mitjana (tones) | 3 | 2 | 160 | $\longrightarrow 3x + 2y \geq 160$ |
| Radiació baixa (tones) | 5 | 2 | 200 | $\longrightarrow 5x + 2y \geq 200$ |
| Cost diari (€) | 20.000 | 20.000 | | $\longrightarrow f(x, y) = 20.000x + 20.000y \longrightarrow$ Funció objectiu |

Minimitzar $\quad f(x, y) = 20.000x + 20.000y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$




La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(80, 0)$, $B(40, 20)$, $C(20, 50)$ i $D(0, 100)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en $B$ i val 1.200.000 €.

Perquè el cost del reciclatge sigui el mínim possible, el primer centre de producció ha de treballar 40 dies, i el segon centre de producció, 20 dies.

**023** **Disposem de 105.00 € per invertir en dos tipus d'accions, *A* i *B*. Les de tipus *A* tenen un interès anual del 8 % i les de tipus *B* del 7 %. Si inverteixo com a màxim 65.000 en les de tipus *A*, com a mínim 3.000 € en les de tipus *B* i vull que la inversió en les de tipus *A* sigui, almenys, igual a la inversió en les de tipus *B*, quina és la distribució amb la qual obtinc un benefici més gran?**

$x \longrightarrow$ diners invertits en $A$ $\qquad y \longrightarrow$ diners invertits en $B$

| | Tipus *A* | Tipus *B* | |
|---|---|---|---|
| Interès anual (%) | 0,08 | 0,07 | $\longrightarrow f(x, y) = 0{,}08x + 0{,}07y \longrightarrow$ Funció objectiu |

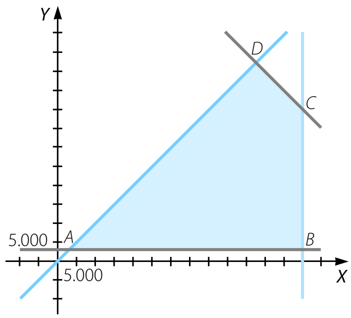
Maximitzar $\quad f(x, y) = 0{,}08x + 0{,}07y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65.000 \\ y \geq 3.000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 105.000 \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada amb vèrtexs en $A(3.000, 3.000)$, $B(65.000, 3.000)$, $C(65.000, 40.000)$ i $D(52.500, 52.500)$.

Com que $f(A) = 450$, $f(B) = 5.410$, $f(C) = 8.000$ i $f(D) = 7.875$, el màxim s'aconsegueix en $C$.

He d'invertir 65.000 € en les accions de tipus $A$ i 3.000 € en les accions de tipus $B$. Obtindré 8.000 €.




**024** **Un circ ha muntat una carpa amb una capacitat per a 1.500 persones, entre adults i nens. El nombre de nens no pot superar els 600 i el nombre d'adults no pot superar el doble del nombre de nens.**

**Si el preu de l'entrada d'adults és de 8 €, i el de nens és un 40 % menys, quina és la quantitat màxima que poden recaptar per les entrades?**

$x \rightarrow$ nre. d'entrades d'adults

$y \rightarrow$ nre. d'entrades de nens

| | Adults | Nens |
|---|---|---|
| Preu (€) | 8 | 4,80 |

$\rightarrow f(x, y) = 8x + 4{,}80y \rightarrow$ Funció objectiu

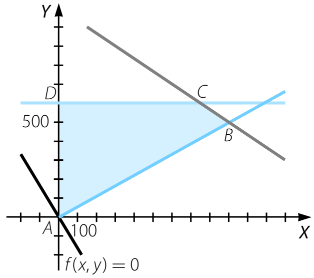
Maximitzar $f(x, y) = 8x + 4{,}80y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 600 \\ x + y \leq 1.500 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada amb vèrtexs $A(0, 0)$; $B(1.000, 500)$; $C(900, 600)$ i $D(0, 600)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 10.400$, $f(C) = 10.080$ i $f(D) = 2.880$, el màxim s'aconsegueix en $B$.

Per maximitzar els diners recaptats amb les entrades, cal vendre 1.000 entrades d'adult i 500 entrades de nen, amb la qual cosa obtenen 10.400 €.



025 Una empresa fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. El departament de costura de l'empresa té 900 hores disponibles, el d'acabat disposa de 300 hores i el d'empaquetat disposa de 100 hores. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

| | Costura | Acabat | Empaquetat | Beneficis |
|---|---|---|---|---|
| Normal | 1 | 1/2 | 1/8 | 4 |
| De luxe | 3/2 | 1/3 | 1/4 | 8 |

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici?

*(Activitat de Selectivitat)*

$x \longrightarrow$ nre. de parells de guants del model normal

$y \longrightarrow$ nre. de parells de guants del model de luxe

| | Model normal | Model de luxe | Hores | |
|---|---|---|---|---|
| Departament de costura | 1 | $\frac{3}{2}$ | 900 | $\rightarrow x + \frac{3}{2}y \leq 900$ |
| Departament d'acabat | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 300 | $\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300$ |
| Departament d'empaquetat | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | 100 | $\rightarrow \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100$ |
| Beneficis (€) | 4 | 8 | | $\longrightarrow f(x, y) = 4x + 8y \rightarrow$ Funció objectiu |

Maximitzar $f(x, y) = 4x + 8y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{r} x + \frac{3}{2}y \leq 900 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

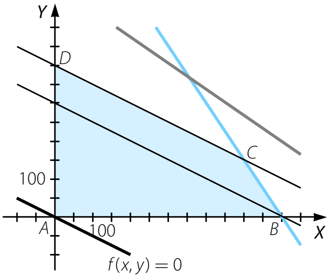
La regió factible està acotada amb vèrtexs:

$A(0, 0)$; $B(600, 0)$; $C(500, 150)$ i $D(0, 400)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu, tenim que el màxim s'aconsegueix en el segment $DC$.

Com que són parells de guants, només valen els punts que tinguin coordenades enteres, és a dir, els punts que tinguin les coordenades de la forma $\left(x, \frac{800 - x}{2}\right)$, amb $0 \leq x \leq 500$ i $x$ un nombre parell.

El benefici és de 3.200 €.



026 Per Nadal, una botiga de queviures vol preparar dos tipus de lots, $L_1$ i $L_2$. Cada lot del tipus $L_1$ està format per 4 barres de torró, 2 ampolles de cava i 2 paquets de cafè, i cada lot del tipus $L_2$ està format per 2 barres de torró, 2 ampolles de cava i 4 paquets de cafè. Amb cada lot del tipus $L_1$ obtenen un benefici de 4,50 €, i amb cada lot del tipus $L_2$ un de 3 €. La botiga disposa de 300 barres de torró, 180 ampolles de cava i 300 paquets de cafè. Quants lots de cada tipus han de preparar per obtenir un benefici màxim?

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \rightarrow$ nre. de lots $L_1$ $\quad y \rightarrow$ nre. de lots $L_2$

| | Lots $L_1$ | Lots $L_2$ | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Barres de torró | 4 | 2 | 300 | $\rightarrow 4x + 2y \leq 300$ |
| Ampolles de cava | 2 | 2 | 180 | $\rightarrow 2x + 2y \leq 180$ |
| Paquets de cafè | 2 | 4 | 300 | $\rightarrow 2x + 4y \leq 300$ |
| Benefici (€) | 4,50 | 3 | | $\rightarrow f(x, y) = 4{,}50x + 3y \rightarrow$ Funció objectiu |

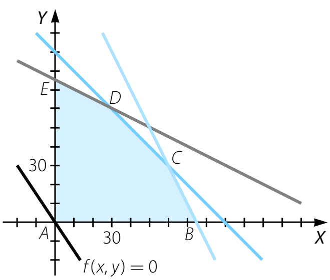
Maximitzar $\quad f(x, y) = 4{,}50x + 3y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y \leq 300 \\ 2x + 2y \leq 180 \\ 2x + 4y \leq 300 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$, $B(75, 0)$, $C(60, 30)$, $D(30, 60)$ i $E(0, 75)$.

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 337{,}5$; $f(C) = 360$; $f(D) = 315$; $f(E) = 225$, el màxim s'aconsegueix en $C$.

Per maximitzar el benefici han de preparar 60 lots de tipus $L_1$ i 30 lots de tipus $L_2$, amb un benefici de 360 €.




027 Un professor ha donat als seus alumnes una llista de problemes perquè en resolguin, com a màxim, 70. Els problemes estan classificats en dos grups. Els del grup $A$ valen 5 punts cadascun, i els del grup $B$, 7 punts. Per resoldre un problema del tipus $A$ es necessiten 2 minuts i per resoldre un problema del tipus $B$, 3 minuts. Si els alumnes disposen de dues hores i mitja per resoldre'ls, quants problemes de cada tipus hauran de fer per obtenir la puntuació màxima?

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \rightarrow$ nre. de problemes del tipus $A$ $\qquad$ $y \rightarrow$ nre. de problemes del tipus $B$

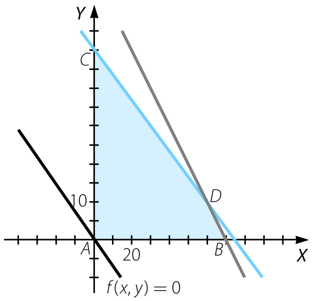
| | Problemes tipus *A* | Problemes tipus *B* | Total |
|---|---|---|---|
| Temps (min) | 2 | 3 | 150 |
| Punts | 5 | 7 | |

Temps: $\rightarrow 2x + 3y \leq 150$

Punts: $\longrightarrow f(x, y) = 5x + 7y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $\quad f(x, y) = 5x + 7y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 150 \\ x + \phantom{3}y \leq 70 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$$




La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(70, 0)$; $C(0, 50)$ i $D(60, 10)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 350$, $f(C) = 350$ i $f(D) = 370$, el màxim s'aconsegueix en $D$. Això significa que per obtenir la puntuació màxima cal fer 60 problemes del tipus $A$ i 10 problemes del tipus $B$, amb la qual cosa s'aconsegueixen 370 punts.

028 **En un magatzem d'electrodomèstics hi ha neveres i rentadores, i poden emmagatzemar un total de 180 unitats. Per atendre de manera adequada la demanda dels clients, han de tenir, almenys, 30 rentadores i el nombre de neveres ha de ser, almenys, igual al nombre de rentadores més 20. Si el cost de cada nevera és de 450 € i el de cada rentadora és de 375 €:**

**a) Formula el problema corresponent.**

**b) Representa la regió factible.**

**c) Quantes unitats de cada electrodomèstic han d'emmagatzemar per minimitzar el cost total?**

***(Activitat de Selectivitat)***

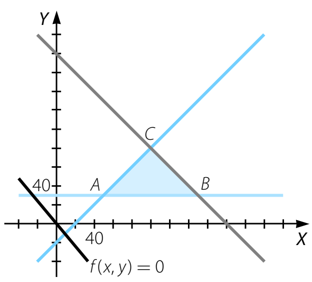
a) $x \rightarrow$ nre. de neveres $\qquad$ $y \rightarrow$ nre. de rentadores

| | Neveres | Rentadores |
|---|---|---|
| Cost (€) | 450 | 375 |

$\rightarrow f(x, y) = 450x + 375y \rightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $\quad f(x, y) = 450x + 375y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ y \geq 30 \\ x \geq y + 20 \end{array}\right\}$$




b) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(50, 30)$; $B(150, 30)$ i $C(100, 80)$.

c) Si substituïm els vèrtexs en la funció objectiu, obtenim $f(A) = 33.750$, $f(B) = 78.750$ i $f(C) = 75.000$; per tant, el mínim s'aconsegueix en $A$. Així doncs, han d'emmagatzemar 50 neveres i 30 rentadores perquè el cost sigui mínim i valgui 33.750 €.

029 Una botiga d'articles de pell necessita per a la pròxima campanya un mínim de 80 bosses, 120 parells de sabates i 90 caçadores. Es proveeix dels articles en dos tallers: *A* i *B*. El taller *A* produeix diàriament 4 bosses, 12 parells de sabates i 2 caçadores amb un cost diari de 360 €. La producció diària del taller *B* és de 2 bosses, 2 parells de sabates i 6 caçadores, amb un cost de 400 € cada dia.

Determina, justificant la resposta:

a) El nombre de dies que ha de treballar cada taller per proveir la botiga amb un cost mínim.

b) El valor d'aquest cost mínim.

*(Activitat de Selectivitat)*

$x \rightarrow$ nre. de dies que treballa el taller *A*

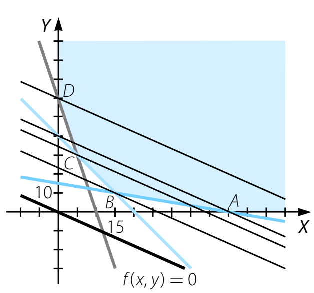
$y \rightarrow$ nre. de dies que treballa el taller *B*

| | Taller *A* | Taller *B* | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Bosses | 4 | 2 | 80 | $\rightarrow 4x + 2y \geq 80$ |
| Sabates | 12 | 2 | 120 | $\rightarrow 12x + 2y \geq 120$ |
| Caçadores | 2 | 6 | 90 | $\rightarrow 2x + 6y \geq 90$ |
| Cost (€) | 360 | 400 | | $\rightarrow f(x, y) = 360x + 400y \rightarrow$ Funció objectiu |

Minimitzar $f(x, y) = 360x + 400y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \geq 80 \\ 12x + 2y \geq 120 \\ 2x + 6y \geq 90 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$$

a) La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs *A*(45, 0), *B*(15, 10), *C*(5, 30) i *D*(0, 60). Si tracem paral·leles a la funció objectiu pels diferents vèrtexs, podem comprovar que el mínim s'aconsegueix en *B*. Per tant, el taller *A* ha de treballar 15 dies i el taller *B* ho ha de fer 10 dies per minimitzar el cost.




b) El valor del cost mínim és de 9.400 €.

030 Dos grups diferents, $G_1$ i $G_2$, de la mateixa empresa poden dur a terme un projecte de jardineria. Es tracta d'enjardinar tres zones: *A*, *B* i *C*.
A la taula següent es recull el nombre d'unitats que pot enjardinar cada grup durant una setmana:

| | Zona *A* | Zona *B* | Zona *C* |
|---|---|---|---|
| Grup $G_1$ | 4 | 10 | 7 |
| Grup $G_2$ | 10 | 5 | 7 |

Han d'enjardinar un mínim de 40 unitats a la zona *A*, 50 unitats a la zona *B* i 40 unitats a la zona *C*, i el cost setmanal s'estima en 3.300 € per al grup $G_1$ i en 4.000 € per al grup $G_2$.

Quantes setmanes haurà de treballar cada grup per acabar el projecte amb el cost mínim? Expressa la funció objectiu i les restriccions del problema. Representa gràficament la regió factible i calcula'n els vèrtexs.

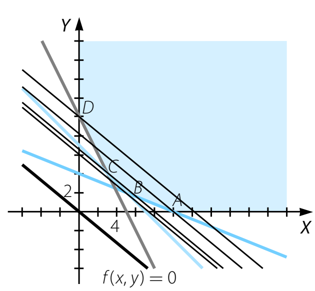
***(Activitat de Selectivitat)***

$x \rightarrow$ nre. de setmanes que haurà de treballar el grup $G_1$
$y \rightarrow$ nre. de setmanes que haurà de treballar el grup $G_2$

| | Grup $G_1$ | Grup $G_2$ | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Zona *A* | 4 | 10 | 40 | $\rightarrow\ 4x + 10y \geq 40$ |
| Zona *B* | 10 | 5 | 50 | $\rightarrow 10x + 5y \geq 50$ |
| Zona *C* | 7 | 7 | 49 | $\rightarrow\ 7x + 7y \geq 49$ |
| Cost (€) | 3.300 | 4.000 | | $\rightarrow f(x, y) = 3.300x + 4.000y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

Minimitzar $\quad f(x, y) = 3.300x + 4.000y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{r} 4x + 10y \geq 40 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 7x + \quad y \geq 49 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$




La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs *A*(10, 0), *B*(5, 2), *C*(3, 4) i *D*(0, 10). Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en *B*. El grup $G_1$ haurà de treballar 5 setmanes i el grup $G_2$ ho haurà de fer 2 setmanes perquè el cost sigui mínim; aquest cost és de 24.500 €.

031 Una empresa fabrica dues qualitats d'un bé, i n'ha de produir en total un mínim de 100 unitats i un màxim de 200. El cost de producció d'una unitat de primera qualitat és de 15 € i s'obté un benefici unitari de 100 €. El cost de producció d'una unitat de segona qualitat és de 10 € i s'obté un benefici unitari de 50 €.

a) Planteja i resol un programa lineal per esbrinar el cost mínim total per obtenir un benefici total de, almenys, 12.500 €.

b) Planteja i resol un programa lineal per esbrinar el benefici total màxim amb un cost total no superior a 2.550 €.

*(Activitat de Selectivitat)*

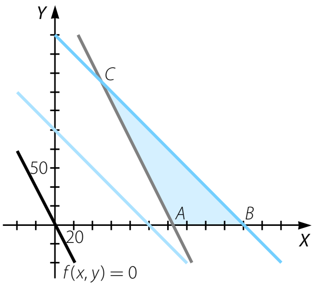
$x \longrightarrow$ nre. d'unitats de qualitat 1

$y \longrightarrow$ nre. d'unitats de qualitat 2

| | Qualitat 1 | Qualitat 2 |
|---|---|---|
| Cost de producció (€) | 15 | 10 |
| Benefici per unitat (€) | 100 | 50 |

a) Minimitzar $f(x, y) = 15x + 10y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 100 \le x + y \le 200 \\ 0 \le x \\ 0 \le y \\ 100x + 50y \ge 12.500 \end{array}\right\}$$

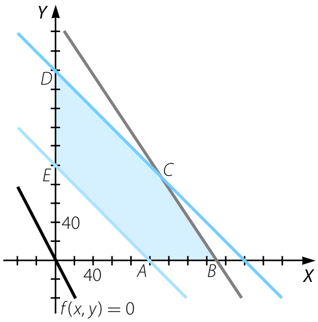



La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(125, 0)$, $B(200, 0)$ i $C(50, 150)$.

Com que $f(A) = 1.875$, $f(B) = 3.000$ i $f(C) = 2.250$, la funció aconsegueix el mínim en $A$, és a dir, han de fabricar 125 unitats de qualitat 1 i cap unitat de qualitat 2 per minimitzar el cost i que sigui de 1.875 €.

b) Maximitzar $f(x, y) = 100x + 50y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 100 \le x + y \le 200 \\ 0 \le x \\ 0 \le y \\ 15x + 10y \le 2.550 \end{array}\right\}$$




La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(100, 0)$, $B(170, 0)$, $C(110, 90)$, $D(0, 200)$ i $E(0, 100)$.

Com que $f(A) = 1.000$, $f(B) = 17.000$, $f(C) = 15.500$, $f(D) = 10.000$ i $f(E) = 5.000$, el màxim s'aconsegueix en $B$, és a dir, cal fabricar 170 objectes de qualitat 1 i cap objecte de qualitat 2 perquè el benefici sigui màxim, de 17.000 €.

032 Un distribuïdor d'oli d'oliva compra la matèria primera en dues almàsseres, *A* i *B*. Les almàsseres *A* i *B* venen l'oli a 2.000 i 3.000 € per tona, respectivament. Cada almàssera li ven un mínim de 2 tones i un màxim de 7 i, per atendre la demanda, el distribuïdor ha de comprar en total un mínim de 6 tones. El distribuïdor ha de comprar a l'almàssera *A* com a màxim el doble d'oli que a l'almàssera *B*.

**Quina quantitat d'oli ha de comprar el distribuïdor a cada una de les almàsseres per obtenir el cost mínim? Determina aquest cost mínim.**

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \longrightarrow$ quantitat d'oli que compra a l'almàssera *A*

$y \longrightarrow$ quantitat d'oli que compra a l'almàssera *B*

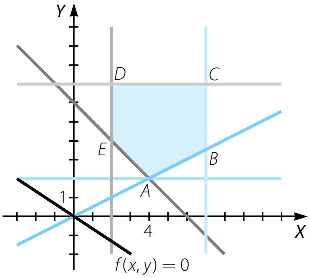
| | Almàssera *A* | Almàssera *B* |
|---|---|---|
| Preu per tona (€) | 2.000 | 3.000 |

$\longrightarrow f(x, y) = 2.000x + 3.000y$
$\longrightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $\quad f(x, y) = 2.000x + 3.000y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \\ 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada amb vèrtexs $A(4, 2)$; $B\left(7, \dfrac{7}{2}\right)$; $C(7, 7)$; $D(2, 7)$ i $E(2, 4)$.




Com que $f(A) = 14.000$, $f(B) = 24.500$, $f(C) = 35.000$, $f(D) = 25.000$ i $f(E) = 16.000$, el mínim s'aconsegueix en *A*. Així doncs, ha de comprar 4 tones d'oli a l'almàssera *B*, amb un cost de 14.000 €.

033 Cada instal·lació d'una televisió analògica necessita 10 m de cable i cada instal·lació de televisió digital en necessita 20 m. Cada televisió analògica necessita 20 minuts d'instal·lació, i cada televisió digital, 30 minuts. Disposem d'un màxim de 400 m de cable al dia. Hem de treballar almenys 300 minuts al dia. Diàriament podem instal·lar un màxim de 20 televisors analògics i hem d'instal·lar, almenys, 6 televisors digitals. Per cada televisor analògic instal·lat obtenim uns ingressos de 10 €, i 15 € per cada televisor digital.

Mitjançant tècniques de programació lineal, representa la regió factible, calcula el nombre de televisors analògics i digitals que permeten obtenir ingressos diaris més grans i l'ingrés màxim diari que es pot aconseguir.

*(Activitat de Selectivitat)*

$x \rightarrow$ nre. de televisors analògics $\quad y \rightarrow$ nre. de televisors digitals

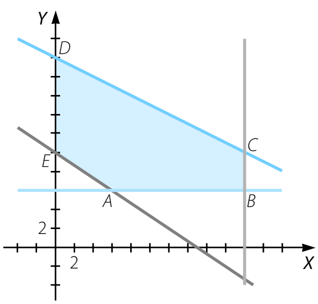
| | Televisor analògic | Televisor digital | Total disponible | |
|---|---|---|---|---|
| Cable (m) | 10 | 20 | 400 | $\rightarrow 10x + 20y \leq 400$ |
| Temps (min) | 20 | 30 | 300 | $\rightarrow 20x + 30y \geq 300$ |
| Ingressos (€) | 10 | 15 | | $\rightarrow f(x, y) = 10x + 15y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

Maximitzar $\quad f(x, y) = 10x + 15y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y \leq 400 \\ 20x + 30y \geq 300 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(6, 6)$, $B(20, 6)$, $C(20, 10)$, $D(0, 20)$ i $E(0, 10)$.

Com que $f(A) = 150$, $f(B) = 290$, $f(C) = 350$, $f(D) = 300$ i $f(E) = 150$, el màxim s'aconsegueix en $C$, és a dir, cal instal·lar 20 televisors analògics i 10 televisors digitals per maximitzar els ingressos, que són de 350 €.




034 Una empresa fabrica dos tipus de peces, *A* i *B*. Cada peça ha de passar per tres departaments amb limitacions de temps. Les hores necessàries per a cada peça i els seus beneficis són:

| | Dep. 1 | Dep. 2 | Dep. 3 | Benefici |
|---|---|---|---|---|
| Peça *A* | 2 | 5 | 2 | 11 € |
| Peça *B* | 6 | 2 | 2 | 7 € |
| Hores disponibles | 66 | 50 | 26 | |

Calcula la producció que maximitza el benefici.

a) Planteja el problema.

b) Resolució gràfica.

c) Analitza gràficament què passa si el benefici de *B* es redueix en 4 €.

*(Activitat de Selectivitat)*

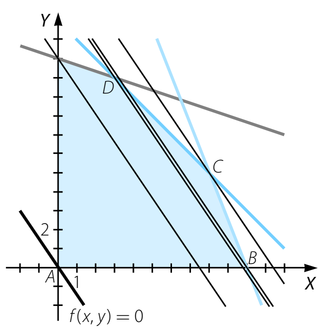
a) $x \rightarrow$ nre. de peces $A$ fabricades
$y \rightarrow$ nre. de peces $B$ fabricades

| | Peça *A* | Peça *B* | Hores disponibles | |
|---|---|---|---|---|
| Dep. 1 | 2 | 6 | 66 | $\rightarrow 2x + 6y \leq 66$ |
| Dep. 2 | 5 | 2 | 50 | $\rightarrow 5x + 2y \leq 50$ |
| Dep. 3 | 2 | 2 | 26 | $\rightarrow 2x + 2y \leq 26$ |
| Benefici (€) | 11 | 7 | | $\rightarrow f(x, y) = 11x + 7y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

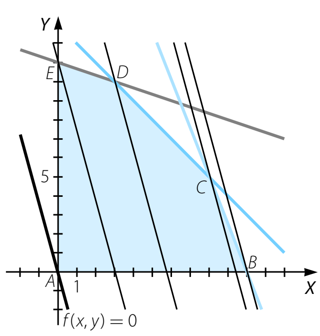
Maximitzar $f(x, y) = 11x + 7y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 6y \leq 66 \\ 5x + 2y \leq 50 \\ 2x + 2y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) La regió factible està acotada amb vèrtexs $A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(8, 5)$, $D(3, 10)$ i $E(0, 11)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per cadascun dels vèrtexs, observem que el màxim s'aconsegueix en $C$. Així doncs, per maximitzar el benefici han de fabricar 8 peces $A$ i 5 peces $B$. El benefici màxim és de 123 €.




c) Les restriccions són les mateixes, i la funció objectiu és: $f(x, y) = 11x + 3y$. Si tracem paral·leles a aquesta funció que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en $B$. Així doncs, per maximitzar el benefici han de fabricar 10 peces $A$ i cap peça $B$. El benefici màxim és de 110 €.



035 Per dotar de mobiliari urbà una zona de la ciutat, es volen col·locar almenys 20 peces entre fanals i jardineres. Hi ha 40 fanals i 12 jardineres disponibles. Es pretén que el nombre de jardineres col·locades no sigui superior a una tercera part del de fanals col·locats, però de manera que almenys un 20 % de les peces que es col·loquin siguin jardineres.

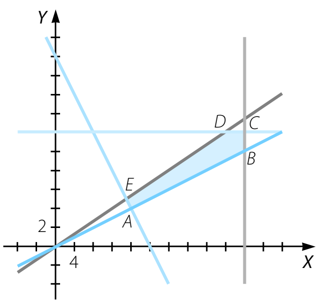
a) Quines combinacions de peces de cada tipus es poden col·locar? Planteja el problema i representa gràficament el conjunt de solucions.

b) Quina combinació fa que la diferència entre el nombre de fanals i de jardineres col·locades sigui més gran? És la combinació en què es col·loquen més peces de mobiliari?

*(Activitat de Selectivitat)*

a) $x \longrightarrow$ nre. de fanals $\quad y \longrightarrow$ nre. de jardineres

Les restriccions són: $\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 40 \\ 0 \le y \le 12 \\ x + y \ge 20 \\ x \le \dfrac{y}{3} \\ 0{,}20(x+y) \le y \end{array}\right\}$




Gràficament és la regió del pla que té com a vèrtexs $A(16, 4)$; $B(40, 10)$; $C(40, 12)$; $D(36, 12)$ i $E(15, 5)$.

b) Hem de maximitzar la funció $f(x, y) = \left|x - y\right|$ subjecte a les restriccions anteriors. Com que la regió està acotada, podem substituir els vèrtexs.

I com que $f(A) = 12$, $f(B) = 30$, $f(C) = 28$, $f(D) = 24$ i $f(E) = 10$, el màxim s'aconsegueix en $B$, és a dir, perquè la diferència sigui més gran cal col·locar 40 fanals i 10 jardineres.

No és la combinació en la qual s'instal·len més peces de mobiliari; això s'aconsegueix col·locant 40 fanals i 12 jardineres.

036 Una companyia de telefonia mòbil vol celebrar una jornada de «Consum raonable» i ofereix als clients l'oferta següent: 15 cèntims d'euro per cada missatge SMS i 25 cèntims d'euro per cada minut de conversa, inclòs el cost d'establiment de trucada. Imposa les condicions:

- El nombre de trucades d'un minut no pot ser més gran que el nombre de missatges augmentat en 3 ni més petit que el nombre de missatges disminuït en 3.
- Si se sumen el quíntuple del nombre de missatges amb el nombre de trucades no pot obtenir-se més de 27.

a) Dibuixa la regió factible.

b) Determina el nombre de missatges i de trucades perquè el benefici sigui màxim.

c) Quin és el benefici màxim?

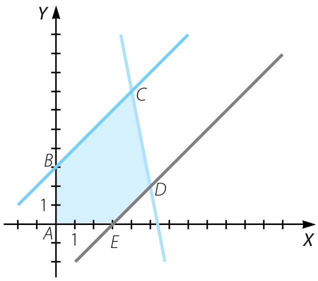
*(Activitat de Selectivitat)*

$x \rightarrow$ nre. de missatges SMS $\quad y \rightarrow$ nre. de minuts de conversa telefònica

| | Missatge SMS | Minut de conversa |
|---|---|---|
| Preu (cèntims) | 15 | 25 |

$\rightarrow f(x, y) = 15x + 25y \rightarrow$ Funció objectiu

a) Les restriccions són: $\left.\begin{array}{l} x - 3 \leq y \leq x + 3 \\ 5x + y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$




La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 7)$; $D(5, 2)$ i $E(3, 0)$.

b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 15x + 25y$ subjecte a les restriccions següents:

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 75$; $f(C) = 235$; $f(D) = 125$ i $f(E) = 45$, el màxim s'aconsegueix en $C$; és a dir, per maximitzar el benefici cal enviar 4 missatges SMS i mantenir 7 minuts de conversa telefònica.

c) El benefici màxim és de 235 cèntims.

037 **Un fabricant de cotxes llença una oferta especial en dos models i ofereix el model *A* a un preu de 15.000 € i el model *B* a un preu de 20.000 €. L'oferta està limitada per les existències, que són 20 cotxes del model *A* i 10 del model *B*, i vol vendre, almenys, tantes unitats del model *A* com del model *B*.**

**D'altra banda, per cobrir les despeses d'aquesta campanya, els ingressos obtinguts han de ser, almenys, de 60.000 €.**

**a) Planteja el problema i representa'n gràficament el conjunt de solucions.**

**b) Quants cotxes haurà de vendre de cada model per maximitzar els ingressos? Quin n'és l'import?**

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \rightarrow$ nre. de cotxes venuts del model $A$

$y \rightarrow$ nre. de cotxes venuts del model $B$

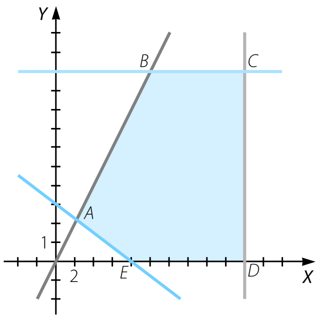
| | Model *A* | Model *B* |
|---|---|---|
| Total de cotxes disponibles | 20 | 10 |
| Preu (€) | 15.000 | 20.000 |

$\rightarrow x \leq 20$; $y \leq 10$

$\rightarrow f(x, y) = 15.000x + 20.000y \rightarrow$ Funció objectiu

a) Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{l} 15.000x + 20.000y \geq 60.000 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$




La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A\left(\dfrac{12}{7}, \dfrac{12}{7}\right)$; $B(10, 10)$; $C(20, 10)$; $D(20, 0)$ i $E(4, 0)$.

b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 15.000x + 20.000y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Com que $f(A) = 60.000$, $f(B) = 350.000$, $f(C) = 500.000$, $f(D) = 300.000$ i $f(E) = 60.000$, el màxim s'aconsegueix en $C$; així doncs, ha de vendre 20 cotxes del model $A$ i 10 cotxes del model $B$ per maximitzar els ingressos. L'import és de 500.000 €.

**038** **Una companyia aèria té dos models d'avió ($A$ i $B$) per cobrir tres trajectes diferents ($T_1$, $T_2$ i $T_3$). El model $A$ pot fer mensualment 10 vegades el trajecte $T_1$, 30 vegades el $T_2$ i 50 vegades el $T_3$. El model $B$ pot fer mensualment 20 vegades cada un dels trajectes. La companyia s'ha compromès a efectuar almenys 80 vegades el trajecte $T_1$, 160 vegades el $T_2$ i 200 vegades el $T_3$.**

**Si el cost del combustible dels dos models és de 200.000 € mensuals, quant de temps ha de volar cada un d'aquests models perquè es compleixin els compromisos adquirits amb el cost mínim?**

$x \rightarrow$ nre. de mesos d'activitat de l'avió $A$

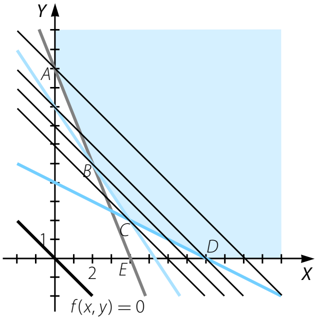
$y \rightarrow$ nre. de mesos d'activitat de l'avió $B$

| | Avió $A$ | Avió $B$ | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Trajecte $T_1$ | 10 | 20 | 80 | $\rightarrow 10x + 20y \geq 80$ |
| Trajecte $T_2$ | 30 | 20 | 160 | $\rightarrow 30x + 20y \geq 160$ |
| Trajecte $T_3$ | 50 | 20 | 200 | $\rightarrow 50x + 20y \geq 200$ |
| Cost del combustible (€) | 200.000 | 200.000 | | $\rightarrow f(x, y) = 200.000x + 200.000y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

Minimitzar $f(x, y) = 200.000x + 200.000y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 160 \\ 50x + 20y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 10)$, $B(2, 5)$, $C(4, 2)$ i $D(8, 0)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en el vèrtex $C$; així doncs, per minimitzar costos cal que l'avió del model $A$ voli 4 mesos i el del model $B$ voli 2 mesos. El cost del combustible pujarà a 1.200.000 €



039 Una empresa d'autobusos de diversos tipus i capacitats disposa, en un dia determinat, d'un màxim de 7 conductors i de 6 conductores. Rep l'encàrrec de transportar els 528 alumnes d'un centre docent a una excursió d'un dia de durada. Si un conductor porta un autobús de 44 places, aleshores les conductores han de portar obligatòriament els de 66 places. En canvi, si una conductora porta un autobús de 24 places, aleshores els conductors han de portar obligatòriament els de 72 places.
La quantitat que cobra l'empresa és de 500 € al dia per conductor, independentment de si és home o dona.

a) Representa la regió factible.
b) Determina el nombre de conductors i el nombre de conductores perquè el benefici empresarial sigui màxim.
c) Calcula aquest benefici màxim.

*(Activitat de Selectivitat)*

$x \rightarrow$ nre. de conductors $\qquad y \rightarrow$ nre. de conductores

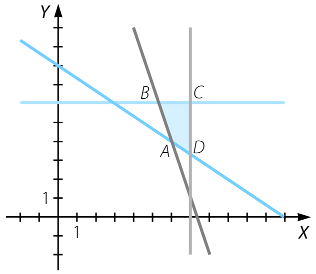
| | Conductors | Conductores |
|---|---|---|
| Diners que cobren (€) | 500 | 500 |

$\rightarrow f(x, y) = 500x + 500y \rightarrow$ Funció objectiu

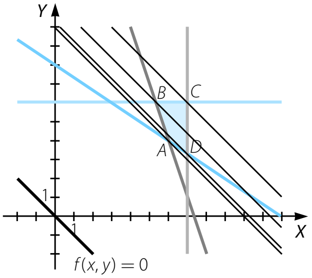
Maximitzar $f(x, y) = 500x + 500y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 44x + 66y \geq 528 \\ 72x + 24y \geq 528 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{array}\right\}$$

a) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(6, 4)$; $B\left(\dfrac{16}{3}, 6\right)$; $C(7, 6)$ i $D\left(7, \dfrac{10}{3}\right)$.




b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 500x + 500y$ subjecte a les restriccions anteriors.
Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $C$; així doncs, perquè el benefici empresarial sigui màxim necessiten 7 conductors i 6 conductores.




c) El benefici màxim és de 6.500 €.

040 **Un camioner transporta dos tipus de mercaderies, *X* i *Y*, i guanya 60 i 50 € per tona, respectivament. Ha de transportar, almenys, 8 tones de *X* i, com a molt, el doble de quantitat que de *Y*. A quant puja el seu guany total màxim si té un camió que pot transportar fins a 30 tones?**

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \rightarrow$ tones de la mercaderia $X$

$y \rightarrow$ tones de la mercaderia $Y$

| | Mercaderia $X$ | Mercancía $Y$ |
|---|---|---|
| Guany (€) | 60 | 50 |

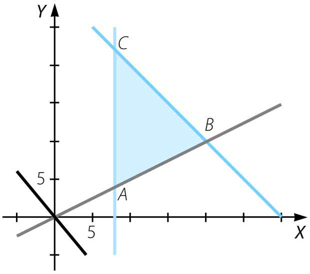
$\rightarrow f(x, y) = 60x + 50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 60x + 50y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array}\right\}$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(8, 4)$, $B(20, 10)$ i $C(8, 22)$.

Com que $f(A) = 680$, $f(B) = 1.700$ i $f(C) = 1.850$, el màxim de la funció s'aconsegueix en $B$; així doncs, per aconseguir els guany total màxim de 1.700 € han de transportar 20 tones de la mercaderia $X$ i 10 tones de la mercaderia $Y$.




041 **Un horticultor vol barrejar fertilitzants que proporcionin un mínim de 15 unitats de potassa, 20 unitats de nitrats i 24 unitats de fosfats. Cada unitat de la marca 1 proporciona 3 unitats de potassa, 1 de nitrats i 3 de fosfats, i costa 120 €. Cada unitat de la marca 2 proporciona 1 unitat de potassa, 5 de nitrats i 2 de fosfats, i té un cost de 60 €. Quina és la combinació de fertilitzants amb un cost menor que satisfà les especificacions desitjades?**

**a) Planteja el problema.**

**b) Resolució gràfica.**

**c) Analitza gràficament què passa si el preu de la marca 2 augmenta en 20 €.**

***(Activitat de Selectivitat)***

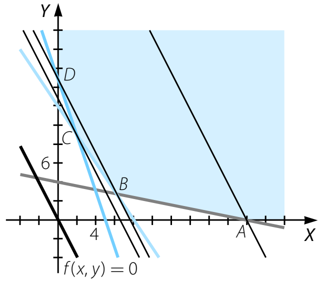
a) $x \rightarrow$ unitats de la marca $A$
$y \rightarrow$ unitats de la marca $B$

| | Marca 1 | Marca 2 | Total | |
|---|---|---|---|---|
| Potassa | 3 | 1 | 15 | $\rightarrow 3x + y \geq 15$ |
| Nitrats | 1 | 5 | 20 | $\rightarrow x + 5y \geq 20$ |
| Fosfats | 3 | 2 | 24 | $\rightarrow 3x + 2y \geq 24$ |
| Cost (€) | 120 | 60 | | $\rightarrow f(x, y) = 120x + 60y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

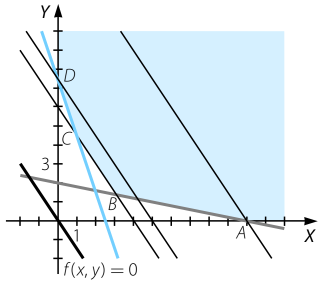
Minimitzar $f(x, y) = 120x + 60y$

Subjecte a $\left.\begin{array}{l} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

b) La regió factible no està acotada, i té com a vèrtexs $A(20, 0)$; $B\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right)$; $C(2, 9)$ i $D(0, 15)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en $C$.
Així doncs, perquè el cost sigui el mínim possible cal agafar 2 unitats de la marca 1 i 9 unitats de la marca 2. El cost puja a 780 €.




c) Si augmentem el preu de la marca 2 de 20 €, obtindríem la funció objectiu següent: $f(x, y) = 120x + 80y$, amb la qual cosa, si seguim el mateix procediment que a l'apartat b) comprovem que el mínim s'aconsegueix en tots els punts del segment $BC$. Com que estem parlant d'unitats de cadascuna de les marques, els valors han de ser enters; així doncs, els punts valen (6,3), (4,6) i (2,9), en els quals el cost puja a 960 €.



042 Mario's Pizza és productor de pizzes congelades de dos tipus, *A* i *B*. Obté un benefici d'1 € per cada pizza *A* que produeix i d'1,50 € per cada pizza tipus *B*. Cada pizza inclou una combinació de pasta de farina i de barreja de farcit, com s'indica en el quadre següent:

| | Pasta de farina | Barreja de farcit | Benefici |
|---|---|---|---|
| Pizza *A* | 1/2 kg | 1/8 kg | 1 € |
| Pizza *B* | 1/2 kg | 1/4 kg | 1,50 € |

Un dia qualsevol, disposa d'un màxim de 75 kg de pasta de farina i de 25 kg de barreja de farcit i, segons les comandes anteriors, ha de vendre diàriament almenys 50 pizzes de tipus *A* i, almenys, 25 pizzes de tipus *B*.

a) Formula el sistema d'inequacions, representa gràficament la regió factible i calcula'n els vèrtexs.

b) Quantes pizzes *A* i *B* haurà de fabricar diàriament per maximitzar els beneficis? Calcula aquests beneficis.

*(Activitat de Selectivitat)*

$x \longrightarrow$ nre. de pizzes del tipus *A*

$y \longrightarrow$ nre. de pizzes del tipus *B*

| | Pizza *A* | Pizza *B* | Total disponible |
|---|---|---|---|
| Pasta de farina | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | 75 |
| Barreja de farcit | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 25 |
| Beneficis (€) | 1 | 1,5 | |

$\longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y \leq 75$

$\longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 25$

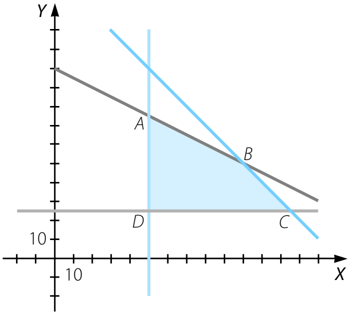
$\longrightarrow f(x, y) = x + 1{,}5y$

$\longrightarrow$ Funció objectiu

a) Les inequacions són:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y \leq 75 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 25 \\ x \geq 50 \\ y \geq 25 \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs *A*(50, 75); *B*(100, 50); *C*(125, 25) i *D*(50, 25).



b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = x + 1{,}5y$ subjecte a les restriccions anteriors.
Com que $f(A) = 162{,}5$, $f(B) = 175$, $f(C) = 162{,}5$ i $f(D) = 87{,}5$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtexs $B$; així doncs, ha d'elaborar diàriament 100 pizzes del tipus $A$ i 50 pizzes del tipus $B$ perquè el benefici sigui màxim. Aquest benefici és de 175 €.

043 **Per seguir una dieta per aprimar-se, es recomana un preparat dietètic que barreja dos productes *A* i *B* amb les condicions següents:**

- **La quantitat de producte *B* no ha de superar la quantitat de producte *A*.**
- **La quantitat de barreja ingerida no ha de superar els 200 grams.**
- **La quantitat de producte *A* no ha de superar els 150 grams.**

**Si, en cada gram, el producte *A* conté 0,4 g de vitamines i el producte *B* conté 0,3 g de vitamines:**

**a) Representa la regió factible.**

**b) Quants grams de cada producte s'ha d'incloure en la barreja per maximitzar-ne el contingut vitamínic?**

***(Activitat de Selectivitat)***

$x \longrightarrow$ grams del producte $A$

$y \longrightarrow$ grams del producte $B$

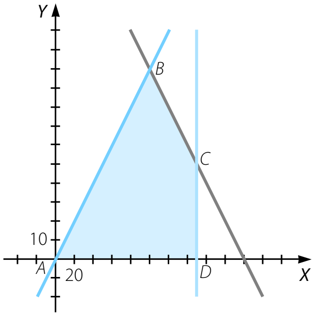
| | Producte *A* | Producte *B* |
|---|---|---|
| Vitamines (g) | 11 | 7 |

$\longrightarrow f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}3y \longrightarrow$ Funció objectiu

a) Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{l} y \le x \\ x + y \le 200 \\ 0 \le x \le 150 \\ 0 \le y \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(100, 100)$; $C(150, 50)$ i $D(150, 0)$.




b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}3y$ subjecte a les restriccions anteriors.
Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 70$, $f(C) = 75$ i $f(D) = 60$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $C$. Així doncs, per maximitzar el contingut vitamínic han de prendre 150 grams del producte $A$ i 50 grams del producte $B$.

044 En una refineria es produeixen dos tipus de fertilitzants a partir de quatre compostos: nitrogen, àcid fosfòric, potassi soluble i guano. A la taula següent s'expressa la composició per bidó d'aquests dos fertilitzants:

| | Nitrogen | Àcid fosfòric | Potassi | Guano |
|---|---|---|---|---|
| Fertilitzant 1 | 20 litres | 30 litres | 30 litres | 20 litres |
| Fertilitzant 2 | 10 litres | 10 litres | 60 litres | 20 litres |

L'empresa disposa de 900 litres de nitrogen i de 1.400 litres de guano, i les quantitats dels altres dos components no estan limitades, encara que a causa del gran estoc existent d'aquests dos productes cal utilitzar almenys 600 litres d'àcid fosfòric i 1.800 litres de potassi. Cada bidó del fertilitzant 1 suposa un benefici de 6 pessetes, i de 5 pessetes cada bidó de l'altre fertilitzant. Troba quina quantitat de fertilitzant de cada classe cal produir per obtenir un benefici màxim.

*(Activitat de Selectivitat)*

Plantegem el problema:

$x \longrightarrow$ nre. de bidons de fertilitzant 1

$y \longrightarrow$ nre. de bidons de fertilitzant 2

Condicions del problema:

Nitrogen $\longrightarrow$ $(r_1)$: $20x + 10y \leq 900$

Guano $\longrightarrow$ $(r_2)$: $20x + 20y \leq 1.400$

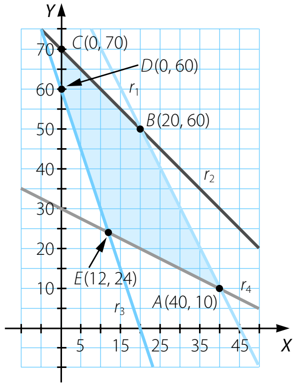
Àcid fosfòric $\longrightarrow$ $(r_3)$: $30x + 10y \geq 600$

Potassi $\longrightarrow$ $(r_4)$: $30x + 60y \geq 1.800$

A més de les dues trivials: $(r_5)$: $y \geq 0$ $(r_6)$: $x \geq 0$

Funció objectiu $\longrightarrow$ $F(x, y) = 5x + 6y$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:




Punts de tall:

$r_1 \cap r_4 = A(40, 10)$ $r_1 \cap r_2 = B(20, 50)$ $r_2 \cap r_6 = C(0, 70)$

$r_3 \cap r_6 = D(0, 60)$ $r_3 \cap r_4 = E(12, 24)$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 5x + 6y \rightarrow \begin{cases} A\colon\ f(40, 10) = 260 \text{ pts.} \\ B\colon\ f(20, 50) = 400 \text{ pts.} \\ C\colon\ f(0, 70) = 420 \text{ pts.} \\ D\colon\ f(0, 60) = 360 \text{ pts.} \\ E\colon\ f(12, 24) = 206 \text{ pts.} \end{cases}$$

El màxim benefici s'obté produint 70 bidons del fertilitzant 2.

**045 En un taller de confecció es disposa de 80 metres quadrats de tela de cotó i de 120 metres quadrats de tela de llana. Es fan dos tipus de vestits, *A* i *B*. Per fer un vestit del tipus *A* es necessita 1 metre quadrat de cotó i 3 metres quadrats de llana; en canvi, per a un vestit del tipus *B* calen 2 metres quadrats de cada tipus de tela.**

**a) Quants vestits de cada tipus s'han de fer per obtenir un benefici total màxim si per cada vestit (sigui del tipus que sigui) es guanyen 30 euros?**

**b) Quina seria la conclusió a la pregunta anterior si per cada vestit del tipus *A* es guanyen 30 euros i, en canvi, per cada un del tipus *B* només es guanyen 20 euros?**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de vestits de tipus *A* $\qquad y \rightarrow$ nre. de vestits de tipus *B*

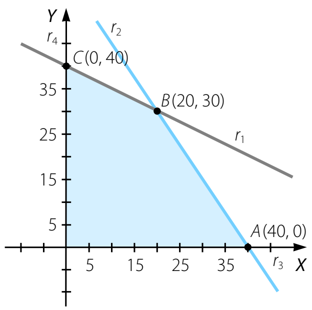
Condicions del problema:

Cotó $\rightarrow r_1\colon x + 2y \leq 80$

Llana $\rightarrow r_2\colon 3x + 2y \leq 120$

A més de les dues trivials: $r_3\colon y \geq 0 \quad r_4\colon x \geq 0$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:




Punts de tall:

$r_2 \cap r_3 = A(40, 0) \quad r_1 \cap r_2 = B(20, 30) \quad r_1 \cap r_4 = C(0, 40) \quad r_3 \cap r_4 = D(0, 0)$

Comprovem en cada cas el benefici:

a) Funció objectiu: $F(x, y) = 30x + 30y$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 30x + 30y \rightarrow \begin{cases} A\colon f(40, 0) = 1.200 \text{ €} \\ B\colon f(20, 30) = 1.500 \text{ €} \\ C\colon f(0, 40) = 1.200 \text{ €} \\ D\colon f(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté fent 20 vestits *A* i 30 de *B*.

b) Funció objectiu: $F(x, y) = 30x + 20y$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 30x + 20y \rightarrow \begin{cases} A: f(40, 0) = 1.200 \text{ €} \\ B: f(20, 30) = 1.200 \text{ €} \\ C: f(0, 40) = 800 \text{ €} \\ D: f(0, 0) = \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté en qualsevol punt del segment $AB$. Hem de buscar els punts de coordenades enteres de la recta $x + 2y = 80$ entre els valors $\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$. Com que $y = \dfrac{80 - x}{2}$, els valors $x$ han de ser parells.

La solució són els 11 parells de valors següents:

(0, 40) (2, 39) (4, 38) (6, 37)
(8, 36) (10, 35) (12, 34) (14, 33)
(16, 32) (18, 31) (20, 30)

046 **Un pastisser té 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos. Es necessiten 3 kg de farina, 1 de sucre i 1 de mantega per fer una dotzena de pastissos del tipus *A*, mentre que les quantitats per una dotzena del tipus *B* són, respectivament, 6 kg, 0,5 kg i 1 kg. Si el benefici que s'obté per la venda d'una dotzena de pastissos del tipus *A* és 20 i per una dotzena del tipus *B* és 30, troba el nombre de dotzenes de pastissos de cada tipus que ha de produir per maximitzar el seu benefici.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de dotzenes de pastissos de tipus $A$

$y \rightarrow$ nre. de dotzenes de pastissos de tipus $B$

Condicions del problema:

Per fer 1 dotzena de pastissos dels dos tipus necessitem:

| 1 dotzena de pastissos | Farina (kg) | Sucre (kg) | Mantega (kg) |
|---|---|---|---|
| Tipus *A* | 3 | 1 | 1 |
| Tipus *B* | 6 | 0,5 | 1 |

Per tant, per fer $x$ dotzenes de tipus $A$ i $y$ dotzenes de tipus $B$, tindrem:

| dotzenes de pastissos | Farina (kg) | Sucre (kg) | Mantega (kg) |
|---|---|---|---|
| $x$ de tipus *A* | $3x$ | $x$ | $x$ |
| $y$ de tipus *B* | $6y$ | $0{,}5y$ | $y$ |

Les condicions són:

Farina $\rightarrow r_1$: $3x + 6y \leq 150$

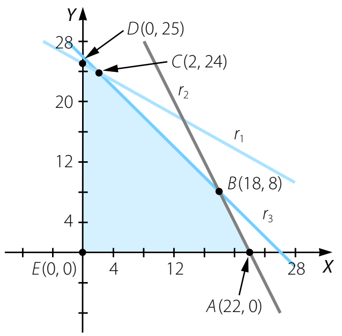
Sucre $\rightarrow r_2$: $x + 0{,}5y \leq 22$

Mantega $\rightarrow r_3$: $x + y \leq 26$

A més de les dues trivials: $r_4$: $y \geq 0$ $\quad r_5$: $x \geq 0$

Funció objectiu $\rightarrow f(x, y) = 20x + 30y$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:




Punts de tall:

$r_2 \cap r_4 = A(22, 0)$ $\quad r_2 \cap r_3 = B(18, 8)$ $\quad r_1 \cap r_3 = C(2, 24)$

$r_1 \cap r_5 = D(0, 25)$ $\quad r_4 \cap r_5 = E(0, 0)$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 20x + 30y \rightarrow \begin{cases} A: f(22, 0) = 440 \\ B: f(18, 8) = 600 \\ C: f(2, 24) = 760 \\ D: f(0, 25) = 750 \\ E: f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

El màxim benefici s'obté amb 2 dotzenes de pastissos de tipus *A* i 24 de tipus *B*, i aquest benefici serà de 760.

047 **En una prova es proposen 10 qüestions de 5 punts i 8 qüestions de 10 punts i es dóna un temps de 100 minuts. Només es valoren els encerts; els errors o respostes en blanc no resten puntuació.**

**L'Anna, que està capacitada per contestar correctament totes les qüestions, necessita 4 minuts de mitjana per respondre a cada qüestió de 5 punts i 10 minuts per respondre a cada qüestió de 10 punts.**

**Quina estratègia ha de seguir l'Anna (és a dir, quantes preguntes de cada tipus ha de contestar) per obtenir la millor puntuació possible en les seves condicions?**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de qüestions de 5 punts (*A*)

$y \rightarrow$ nre. de qüestions de 10 punts (*B*)

Condicions del problema:

Qüestions *A* (de 5 punts) $\rightarrow (r_1): x \leq 10$

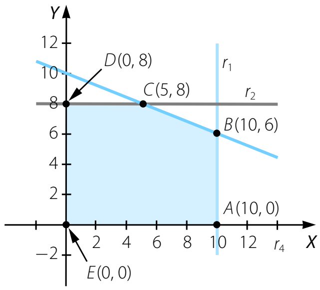
Qüestions *B* (de 10 punts) $\rightarrow (r_2): y \leq 8$

Temps $\rightarrow (r_3): 4x + 10y \leq 100$

A més de les dues trivials $\rightarrow (r_4): y \geq 0$ $\qquad (r_5): x \geq 0$

Funció objectiu $\rightarrow F(x, y) = 5x + 10y$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:




Punts de tall:

$r_1 \cap r_4 = A(10, 0)$ $\quad r_1 \cap r_3 = B(10, 6)$ $\quad r_2 \cap r_3 = C(5, 8)$ $\quad r_2 \cap r_5 = D(0, 8)$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 5x + 10y \rightarrow \begin{cases} A\text{: } f(10, 0) = 50 \text{ punts} \\ B\text{: } f(10, 6) = 110 \text{ punts} \\ C\text{: } f(5, 8) = 105 \text{ punts} \\ D\text{: } f(0, 8) = 80 \text{ punts} \\ E\text{: } f(0, 0) = 0 \text{ punts} \end{cases}$$

La millor estratègia és contestar 10 preguntes de 5 punts i 6 preguntes de 10 punts. I la puntuació que s'obtindrà serà de 110 punts.

**048 Un entusiasta de la salut vol tenir un mínim de 36 unitats de vitamina A al dia, 28 unitats de vitamina C i 32 unitats de vitamina D. Cada pastilla de la marca 1 costa 0,03 € i proporciona 2 unitats de vitamina A, 2 de C i 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 costa 0,04 € i proporciona 3 unitats de vitamina A, 2 de C i 2 de D. Quantes pastilles de cada marca haurà de comprar per a cada dia si vol cobrir les necessitats bàsiques amb el menor cost possible?**

***(Activitat de Selectivitat)***

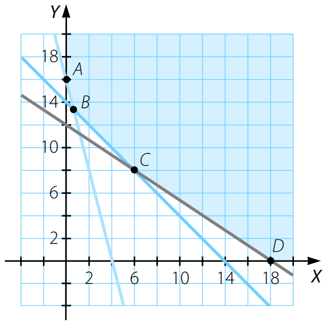
Plantegem el problema amb una taula que contingui les dades del problema:

| | Quantitat (pastilles) | Vitamina A | Vitamina B | Vitamina D | Cost (€) |
|---|---|---|---|---|---|
| Marca 1 | $x$ | $2x$ | $2x$ | $8x$ | $0{,}03x$ |
| Marca 2 | $y$ | $3y$ | $2y$ | $2y$ | $0{,}04y$ |
| Condicions | $x \geq 0, y \geq 0$ | $2x + 3y \geq 36$ | $2x + 2y \geq 28$ | $8x + 2y \geq 32$ | $0{,}03x + 0{,}04y$ |

Hem de minimitzar la funció cost $C(x, y) = 0{,}03x + 0{,}04y$ a la regió definida per les restriccions següents:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x \geq 0 \\ (2) & y \geq 0 \\ (3) & 2x + 3y \geq 36 \\ (4) & 2x + 2y \geq 28 \\ (5) & 8x + 2y \geq 32 \end{array}\right\}$$

La regió factible és:




Els punts de tal de les diferents rectes que defineixen la regió són:

$r_1 \cap r_5 = A(0, 16)$ $\quad r_4 \cap r_5 = B\left(\frac{2}{3}, \frac{40}{3}\right)$ $\quad r_3 \cap r_4 = C(6, 8)$ $\quad r_2 \cap r_3 = D(18, 0)$

Per obtenir el mínim, calculem el valor de la funció cost en cada vèrtex ja que sabem que s'obté en un vèrtex o en un costat:

$C(A) = 0{,}64 \quad C(B) = 0{,}5533 \quad C(C) = 0{,}5 \quad C(D) = 0{,}54$

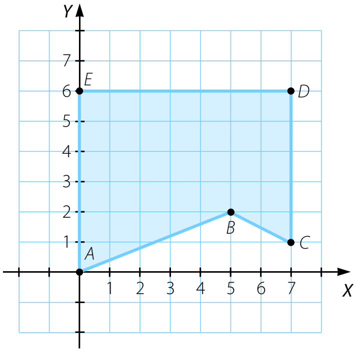
El cost mínim s'obté en el punt $C$, o sigui s'obté prenent 6 pastilles de la marca 1 i 8 pastilles de la marca 2, i el cost és 0,5 €/dia.

049 **Decideix si el polígon de vèrtexs consecutius $A(0, 0)$, $B(5, 2)$, $C(7, 1)$, $D(7, 6)$ i $E(0, 6)$ és la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifica la resposta.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Dibuixem la gràfica de la regió factible:

Com podem comprovar, és un polígon no convex, per la qual cosa no pot ser la regió factible d'un problema de programació lineal.




050 **Un curs de segon de batxillerat d'un institut té un grup que està format per 20 noies i 10 nois, que volen organitzar un viatge de fi de batxillerat. A fi de recollir diners, troben una feina de fer enquestes. L'empresa contracta equips de joves per fer enquestes durant les tardes lliures que poden ser de dos tipus:**

**A: parelles d'un noi i una noia.**

**B: equips de tres noies i un noi.**

**Paguen a 40 € la tarda els equips A i a 90 € la tarda els equips B.**

**Com els convé distribuir-se per obtenir la major quantitat possible de diners?**

**Quina quantitat de diners obtindran per tarda treballada?**

***(Activitat de Selectivitat)***

Elaborem una taula amb les dades del problema:

| | Teixit color (m) | Teixit blanc (m) | Hores de feina |
|---|---|---|---|
| Vestit *A* | 2 | 1 | 4 |
| Vestit *B* | 2,50 | 0,5 | 3 |
| Màxim | 250 | 100 | 380 |

a) Restriccions del problema:

Teixit color $\rightarrow (r_1)$: $2x + 2{,}5y \leq 250$

Teixit blanc $\rightarrow (r_2)$: $x + 0{,}5y \leq 100$

Hores de treball $\rightarrow (r_2)$: $4x + 3y \leq 380$

A més de les dues trivials $\rightarrow (r_4)$: $y \geq 0$ $\quad (r_5)$: $x \geq 0$

b) Representació gràfica de la regió factible:

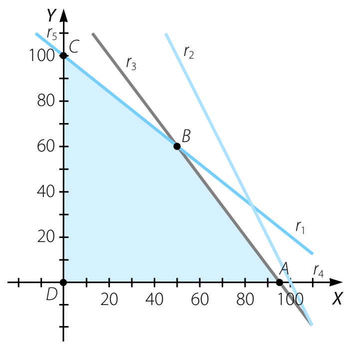
Els punts de tall són els següents:

$r_3 \cap r_4 = A(95, 0)$

$r_1 \cap r_3 = B(50, 60)$

$r_1 \cap r_5 = C(0, 100)$

$r_4 \cap r_5 = D(0, 0)$




c) El benefici que s'obté és $f(x, y) = 5x + 4y$ i el seu màxim estarà en un vèrtex. Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \begin{cases} A: f(95, 0) = 475 \text{ €} \\ B: f(50, 60) = 490 \text{ €} \\ C: f(0, 100) = 400 \text{ €} \\ D: f(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà fabricant 50 vestits de tipus *A* i 60 de tipus *B*, i aquest benefici serà de 490 €.

d) Sobrants: En el cas que hem obtingut gastaran:

– teixit de color: $2 \cdot 50 + 2{,}5 \cdot 60 = 250$ m $\rightarrow$ no en sobra gens.

– teixit blanc: $1 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 60 = 80$ m $\rightarrow$ sobraran 20 m de teixit blanc

052 **En una empresa es fabriquen dos tipus de peces que nomenarem *A* i *B*. Per fabricar una peça de tipus *A* es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus *B*, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus *A* ni més de 20 de tipus *B*.**

**a) Dóna un sistema d'inequacions que representi les restriccions en la fabricació que té l'empresa.**

**b) Determina gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.**

**c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall? Explica detalladament què fas per trobar-los.**

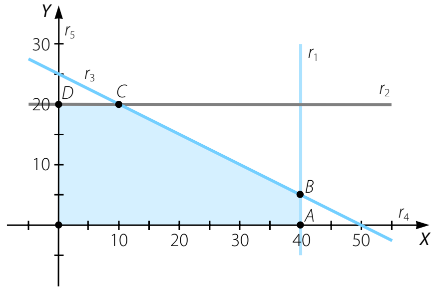
***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:
$x \longrightarrow$ nre. de peces de tipus $A$
$y \longrightarrow$ nre. de peces de tipus $B$

a) Restriccions:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \le 40 \\ (r_2) & y \le 20 \\ (r_3) & 2x + 4y \le 100 \\ (r_4) & x \ge 0 \\ (r_5) & y \ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Gràfica de la regió factible:




c) Possibles solucions:

Si volem exhaurir els 100 quilos de metall, el nombre de peces serà un punt de coordenades enteres que estarà en el segment $BC$, en què $B(40, 5)$ i $C(10, 20)$.

Aquests valors han de complir que $2x + 4y = 100 \rightarrow y = \frac{100 - 2x}{4}$; per tant, $x$ ha de ser múltiple de 2. Solucions:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (10, 20) | (12, 19) | (14, 18) | (16, 17) |
| (18, 16) | (20, 15) | (22, 14) | (24, 13) |
| (26, 12) | (28, 11) | (30, 10) | (32, 9) |
| (34, 8) | (36, 7) | (38, 6) | (40, 5) |

053 **Una marca comercial utilitza tres ingredients *A* i *B* i *C* en l'elaboració de tres tipus de pizzes *P*1, *P*2 i *P*3. La pizza *P*1 s'elabora amb 1 unitat de *A*, 2 de *B* i 2 de *C*; la *P*2 s'elabora amb 2 unitats de *A*, 1 de *B* i 1 de *C*, i la *P*3 s'elabora amb 2 unitats de *A*, 1 de *B* i 2 de *C*.**

**El preu de venda al públic és de 4,80 € per a *P*1, 4,10 € per a *P*2 i 4,90 € per a *P*3. Sabent que el marge comercial (benefici) és d'1,60 € en cadascuna, troba quant costa cada unitat de *A* i *B* i *C* a la marca comercial esmentada.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Anomenem $x$, $y$ i $z$ els costos de les unitats dels ingredients $A$, $B$ i $C$.

Plantegem el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 4{,}80 - 1{,}60 \\ 2x + y + z = 4{,}10 - 1{,}60 \\ 2x + y + 2z = 4{,}90 - 1{,}60 \end{array}\right\}$$

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3{,}2 \\ 2 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 2 & 1 & 2 & 3{,}3 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1-F_3\to F_3]{2F_1-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3{,}2 \\ 0 & 3 & 3 & 3{,}9 \\ 0 & 3 & 2 & 3{,}1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3{,}2 \\ 0 & 3 & 3 & 3{,}9 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}8 \end{array}\right)$$

Que dóna aquest sistema equivalent i la solució corresponent:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3{,}20 \\ 3y+3z=3{,}9 \\ z=0{,}80 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=0{,}6 \text{ €} \\ y=0{,}5 \text{ €} \\ z=0{,}8 \text{ €} \end{array}\right.$$

054 **Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles del tipus *A* i 20 del tipus *B*. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.**

**a) Siguin *x* i *y* el nombre d'articles produïts per dia dels tipus *A* i *B*, respectivament. Expressa les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en *x* i *y*.**

**b) Representa la regió del pla determinada per aquest sistema.**

**c) Sabem que el benefici de produir els articles de tipus *A* és el doble del que s'obté amb els articles de tipus *B*. Troba quants articles de cada tipus ha de produir el taller per obtenir el benefici màxim.**

***(Activitat de Selectivitat)***

a) Condicions del problema:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & x \leq 12 \\ (r_3) & y \geq 0 \\ (r_4) & y \leq 20 \\ (r_5) & x+y \geq 20 \\ (r_6) & x+y \leq 25 \end{array}\right\}$$

b) Representació gràfica de la regió factible:

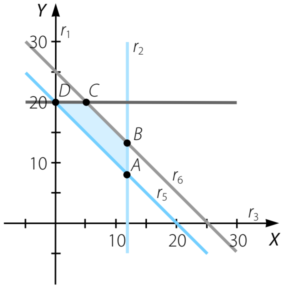
Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_5 = A(12, 8)$

$r_2 \cap r_6 = B(12, 13)$

$r_4 \cap r_6 = C(5, 20)$

$r_1 \cap r_4 = D(0, 20)$




c) Benefici màxim:

El benefici està determinat per la funció objectiu: $B(x, y) = k(2x + y)$.

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = K(2x+y) \to \left\{\begin{array}{l} A\colon B(12, 8) = 32k \\ B\colon B(12, 13) = 37k \\ C\colon B(5, 20) = 30k \\ D\colon B(0, 20) = 20k \end{array}\right.$$

El benefici màxim s'obtindrà produint 12 articles de tipus *A* i 13 productes de tipus *B*, i aquest benefici serà de 37 k.

055 **Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot *A* consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9 €. El lot *B* consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11 €. Calcula quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \longrightarrow$ nre. de lots de tipus $A$

$y \longrightarrow$ nre. de lots de tipus $B$

Condicions del problema:

Per fer 1 lot de cada tipus es necessita:

| | Samarretes | Llapis | Bolis |
|---|---|---|---|
| Tipus *A* | 1 | 3 | 2 |
| Tipus *B* | 1 | 2 | 4 |

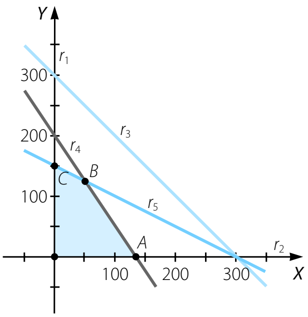
Per tant, per fer $x$ lots de tipus $A$ i $y$ lots de tipus $B$, tindrem:

| Lots | Samarretes | Llapis | Bolis |
|---|---|---|---|
| Tipus *A* ($x$) | $x$ | $3x$ | $2x$ |
| Tipus *B* ($y$) | $y$ | $2y$ | $4y$ |

Les condicions són:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & x + y \leq 300 \\ (r_4) & 3x + 2y \leq 400 \\ (r_5) & 2x + 4y \leq 600 \end{array}\right\}$$

Gràfica de la regió factible:




Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_5 = A(300, 0)$

$r_4 \cap r_5 = B(50, 125)$

$r_1 \cap r_5 = C(0, 150)$

$r_1 \cap r_2 = D(0, 150)$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent: $B(x, y) = 9x + 11y$.

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 9x + 11y \rightarrow \begin{cases} A\colon B(300, 0) = 2.700 \text{ €} \\ B\colon B(50, 125) = 1.825 \text{ €} \\ C\colon B(0, 150) = 1.650 \text{ €} \\ D\colon B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà venent 50 lots de tipus $A$ i 125 lots de tipus $B$, i aquest benefici serà de 1.825 €.

056 En un jardí municipal es volen plantar un mínim de 1.200 geranis, 3.200 clavells i 3.000 margarides. Una empresa *A* ofereix un lot que conté 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15 €. Una altra empresa *B* ofereix un lot de 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12 €. L'Ajuntament compra *x* lots a l'empresa *A* i *y* lots a l'empresa *B*.

a) Determina les inequacions que representen les restriccions a les quals estan sotmesos els valors de *x* i de *y* per tal que compleixin les condicions de la plantació.

b) Representa gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.

c) Troba el nombre de lots de cada tipus que fan que la despesa sigui mínima i calcula aquesta despesa mínima.

d) Troba quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim i quantes plantes i de quin tipus haurà adquirit per sobre del mínim que vol plantar.

*(Activitat de Selectivitat)*

Dades del problema:

$x \longrightarrow$ nre. de lots de l'empresa *A*

$y \longrightarrow$ nre. de lots de l'empresa *B*

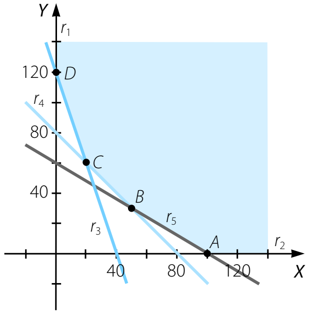
El total de flors que necessitem per plantar en funció dels lots és el següent:

| Lots | Geranis | Clavells | Margarides |
|---|---|---|---|
| Empresa *A* ($x$) | $30x$ | $40x$ | $30x$ |
| Empresa *B* ($y$) | $10y$ | $40y$ | $50y$ |

a) Restriccions del problema:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & 30x + 10y \geq 1.200 \\ (r_4) & 40x + 40y \geq 3.200 \\ (r_5) & 30x + 50y \geq 3.000 \end{array}\right\}$$

b) Representació gràfica de la regió factible:




Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_5 = A(100, 0)$ $r_4 \cap r_5 = B(50, 30)$ $r_3 \cap r_4 = C(20, 60)$ $r_1 \cap r_3 = D(0, 120)$

c) Despesa mínima.

La despesa està determinada per la funció objectiu següent:
$D(x, y) = 15x + 12y$.

Calculem el valor d'aquesta despesa en cadascun dels vèrtexs:

$$D(x, y) = 15x + 12y \rightarrow \begin{cases} A: B(100, 0) = 1.500 \text{ €} \\ B: B(50, 30) = 1.110 \text{ €} \\ C: B(20, 60) = 1.020 \text{ €} \\ D: B(0, 120) = 1.440 \text{ €} \end{cases}$$

Per tant, la despesa mínima s'obtindrà comprant 20 lots a l'empresa *A* i 60 lots a l'empresa *B*, i aquesta despesa és de 1.020 €.

d) Amb aquesta compra, la quantitat de flors en cada cas és:

Geranis: $30 \cdot 20 + 10 \cdot 60 = 1.200$

Clavells: $40 \cdot 20 + 40 \cdot 60 = 3.200$

Margarides: $30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3.600$

Sobren 600 margarides.

057 **Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per a fer una jaqueta es necessiten 1 m de roba i 2 botons, i per a fer uns pantalons calen 2 m de roba, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que s'obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:**

**a) Calcula el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determina també aquest benefici màxim.**

**b) Si el material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 € cada botó, calcula quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de jaquetes

$y \rightarrow$ nre. de pantalons

Condicions del problema:

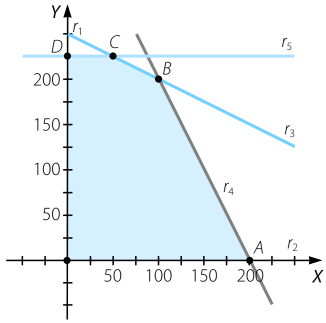
Per fer aquestes quantitats, necessitem:

| | Roba | Botons | Cremalleres |
|---|---|---|---|
| Jaquetes ($x$) | $x$ | $2x$ | 0 |
| Pantalons ($x$) | $2y$ | $y$ | $y$ |

a) Les condicions del problema són:

$$\left.\begin{array}{ll} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & 30x + 10y \geq 1.200 \\ (r_4) & 40x + 40y \geq 3.200 \\ (r_5) & 30x + 50y \geq 3.000 \end{array}\right\}$$

La gràfica de la regió factible és:




Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_4 = A(200, 0)$ $r_3 \cap r_4 = B(100, 200)$ $r_3 \cap r_5 = C(50, 225)$
$r_1 \cap r_5 = D(0, 225)$ $r_1 \cap r_2 = D(0, 0)$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent:
$B(x, y) = 20x + 30y$.

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 20x + 30y \rightarrow \begin{cases} A\colon B(20, 0) = 4.000 \text{ €} \\ B\colon B(100, 200) = 8.000 \text{ €} \\ C\colon B(50, 225) = 7.750 \text{ €} \\ D\colon B(0, 225) = 6.750 \text{ €} \\ E\colon B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté fent 100 jaquetes i 200 pantalons, i és de 8.000 €.

b) Sobrants.

El material que sobra és el següent:

– Roba: $1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 = 500$

– Botons: $2 \cdot 100 + 1 \cdot 200 = 400$

– Cremalleres: $0 \cdot 100 + 1 \cdot 200 = 200$

Per tant, sobren $225 - 200 = 25$ cremalleres, a 0,2 €, dóna un benefici extra de 5 €.

**058** **En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0,9 m$^2$ de cuir i 8 hores de feina. Per al segon model necessiten 1,2 m$^2$ de cuir i 4 hores de feina. Per a fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m$^2$ de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.**

**a) Expressa, mitjançant un sistema d'inequacions, les restriccions a les quals està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.**

**b) Representa la regió solució d'aquest sistema i troba'n els vèrtexs.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de bosses model 1

$y \rightarrow$ nre. de bosses model 2

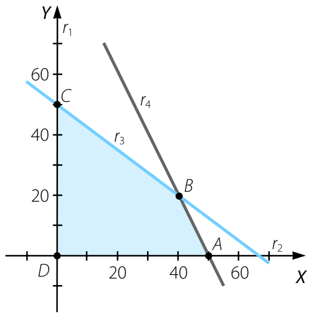
a) Condicions del problema:

| Nre. bosses | Cuir ($m^2$) | Feina (hores) |
|---|---|---|
| Model 1 ($x$) | $0{,}9x$ | $8x$ |
| Model 2 ($y$) | $1{,}2y$ | $4y$ |

Restriccions:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & 0{,}9x + 1{,}2y \leq 60 \\ (r_4) & 8x + 4y \leq 400 \end{array}\right\}$$

b) Gràfica de la regió factible:




Els punts de tall són els següents:

$r_2 \cap r_4 = A(50, 0)$ $\quad r_3 \cap r_4 = B(40, 20)$ $\quad r_1 \cap r_3 = C(0, 50)$

$r_1 \cap r_2 = D(0, 0)$

059 **Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, *A* i *B*. Per al model *A* calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model *B* calen 4 h de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2.800 h de feina i de 1.200 m de fusta. Els armaris de tipus *A* i *B* proporcionen, respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determina el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per obtenir el benefici màxim.**

***(Activitat de Selectivitat)***

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. d'armaris del model $A$ $\qquad y \rightarrow$ nre. d'armaris del model $B$

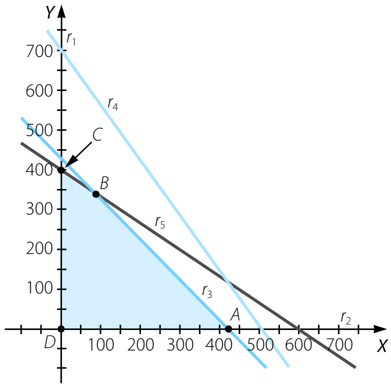
Per fabricar aquests armaris, necessitem:

| | Feina (hores) | Fusta ($m^2$) |
|---|---|---|
| Model $A$ ($x$) | $5{,}5x$ | $2x$ |
| Model $B$ ($y$) | $4y$ | $3y$ |

Les condicions del problema són:

$$\left.\begin{array}{lr} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & x + y \leq 430 \\ (r_4) & 5{,}5x + 4y \leq 2.800 \\ (r_5) & 2x + 3y \leq 1.200 \end{array}\right\}$$

La gràfica de la regió factible és:




Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_3 = A(430, 0)$ $\quad r_3 \cap r_5 = B(90, 340)$ $\quad r_1 \cap r_5 = C(0, 400)$

$r_1 \cap r_2 = D(0, 0)$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent:

$B(x, y) = 250x + 310y$.

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 250x + 310y \rightarrow \begin{cases} A: B(430, 0) = 107.500 \text{ €} \\ B: B(90, 340) = 127.900 \text{ €} \\ C: B(0, 400) = 124.000 \text{ €} \\ D: B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà fabricant 90 armaris del model *A* i 340 armaris del model *B*, i aquest benefici serà de 127.900 €.

060 **Un estudiant dedica part del seu temps a repartir propaganda publicitària. L'empresa *A* li paga 4 cèntims per cada imprès repartit, i l'empresa *B*, amb fulletons més grans, li paga 7 cèntims per imprès. L'estudiant porta dues bosses: una per a impresos *A*, on n'hi caben 150, i una altra per a impresos *B*, on n'hi caben 90. Ha calculat que cada dia és capaç de repartir 200 impresos com a màxim. L'estudiant es pregunta: quants impresos hauré de repartir de cada classe perquè el benefici diari sigui màxim?**

Plantegem el problema:

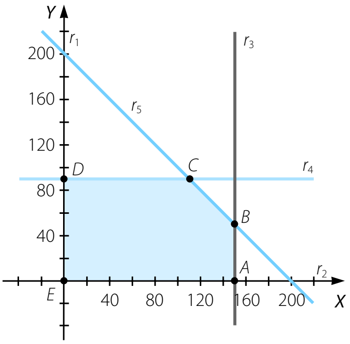
$x \rightarrow$ nre. d'impresos de l'empresa *A*

$y \rightarrow$ nre. d'impresos de l'empresa *B*

Condicions del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & y \geq 0 \\ (r_3) & x \leq 150 \\ (r_4) & y \leq 90 \\ (r_5) & x + y \leq 200 \end{array}\right\}$$

La gràfica de la regió factible és:




Els punts de tall són:

$r_2 \cap r_3 = A(150, 0)$
$r_3 \cap r_5 = B(150, 50)$
$r_4 \cap r_5 = C(110, 90)$
$r_1 \cap r_4 = D(0, 90)$
$r_1 \cap r_2 = E(0, 0)$

El benefici (en euros) està determinat per la funció objectiu següent:

$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y)$. Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y) \rightarrow \begin{cases} A\colon B(150, 0) = 6 \text{ €} \\ B\colon B(150, 50) = 9{,}5 \text{ €} \\ C\colon B(110, 90) = 10{,}9 \text{ €} \\ D\colon B(0, 90) = 6{,}3 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà repartint 110 impresos de l'empresa *A* i 90 impresos de l'empresa *B*, i aquest benefici serà de 10,9 €.

## PREPARA LA SELECTIVITAT

*(Activitats de Selectivitat)*

1 **Dos compostos medicinals tenen dos principis actius *A* i *B*. Per cada píndola, el primer compost té 2 unitats de *A* i 6 de *B*, mentre que el segon compost té 4 unitats de *A* i 4 unitats de *B*. Durant un període de temps, un pacient ha de rebre un mínim de 16 unitats del tipus *A* i un mínim de 24 unitats del tipus *B*. Si el cost de cada píndola del primer compost és de 0,50 € i el cost de cada píndola del segon compost és de 0,90 €:**

**a) Representa la regió factible.**

**b) Calcula el nombre òptim de píndoles de cada compost que ha de rebre el pacient per minimitzar els costos.**

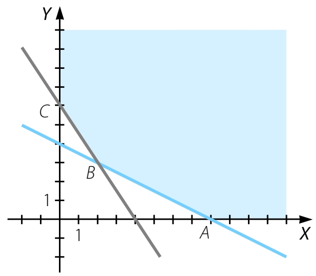
a) $x \rightarrow$ nre. d'unitats del primer compost
$y \rightarrow$ nre. d'unitats del segon compost

| | Compost 1 | Compost 2 | Nre. d'unitats | |
|---|---|---|---|---|
| Principi *A* | 2 | 4 | 16 | $\rightarrow 2x + 4y \geq 16$ |
| Principi *B* | 6 | 4 | 24 | $\rightarrow 6x + 4y \geq 24$ |
| Cost (€) | 0,50 | 0,90 | | $\rightarrow f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}90y$ $\rightarrow$ Funció objectiu |

La regió factible està determinada per:

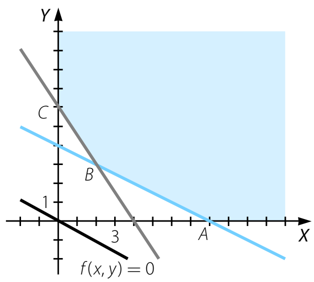
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y \geq 16 \\ 6x + 4y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Es tracta d'una regió factible no acotada amb vèrtexs $A(8, 0)$; $B(2, 3)$ i $C(0, 6)$.




b) Es tracta de minimitzar la funció $f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}90y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Gràficament, si tracem rectes paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en el vèrtex $B$; així doncs, el pacient ha de prendre 2 píndoles del primer compost i 3 píndoles del segon per minimitzar costos, que pugen a 3,70 €.




2 **Una empresa fabrica dos tipus de televisors ($T_{21}$ i $T_{14}$) de 21 i 14 polzades, a un cost per televisor de 100 i 50 €, respectivament. Sabem que el nombre de televisors $T_{21}$ fabricats diàriament no supera en 4 unitats als $T_{14}$, i que entre tots dos no superen diàriament els 30 televisors. També sabem que el procés productiu no permet fabricar diàriament menys de 2 televisors $T_{21}$ ni menys de 5 televisors $T_{14}$.**

**a) Formula el sistema d'inequacions associat a l'enunciat.**

**b) Dibuixa la regió factible i calcula'n els vèrtexs.**

**c) Calcula quants televisors $T_{21}$ i $T_{14}$ maximitzen el cost de producció diària i quants la minimitzen.**

a) $x \rightarrow$ nre. d'unitats de $T_{21}$

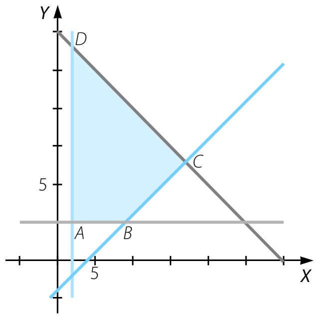
$y \rightarrow$ nre. d'unitats de $T_{14}$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y + 4 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array}\right\}$$

b) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(2, 5)$, $B(9, 5)$, $C(17, 13)$ i $D(2, 28)$.

c) Es tracta de maximitzar i minimitzar la funció $f(x, y) = 100x + 50y$ subjecte a les restriccions de l'apartat a).

Com que $f(A) = 450$, $f(B) = 1.150$, $f(C) = 2.350$ i $f(D) = 1.600$, el màxim s'aconsegueix en $C$, i el mínim, en $A$. La conclusió és que per maximitzar el cost de producció cal fabricar 17 televisors de 21 polzades i 13 televisors de 14 polzades, i per minimitzar el cost de producció han de fabricar 2 televisors de 21 polzades i 5 televisors de 14 polzades.




3 **Una aerolínia vol optimitzar el nombre de files de classe preferent i de classe turista en un avió. La longitud útil de l'avió per instal·lar les files de seients és de 104 m, i es necessiten 2 m per instal·lar una fila de classe preferent i 1,5 m per a les de classe turista. L'aerolínia ha d'instal·lar almenys 3 files de classe preferent i que les files de classe turista siguin com a mínim el triple que les de classe preferent. Els beneficis per fila de classe turista són de 152 € i de 206 € per a la classe preferent.**

**Quantes files de classe preferent i quantes de classe turista han d'instal·lar per obtenir el benefici màxim? Indica aquest benefici.**

$x \rightarrow$ nre. de files de classe preferent $\quad y \rightarrow$ nre. de files de classe turista

| | Preferent | Turista | Total |
|---|---|---|---|
| Longitud (m) | 2 | 1,5 | 104 |
| Beneficis (€) | 206 | 152 | |

$\rightarrow 2x + 1{,}5y \leq 104$

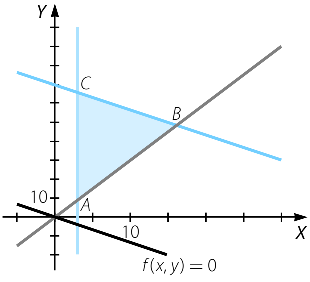
$\rightarrow f(x, y) = 206x + 152y$
$\rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $\quad f(x, y) = 206x + 152y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 1{,}5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(3, 9)$; $B(16, 48)$ i $C(3; 65{,}3)$.

Com que $f(A) = 1.986$, $f(B) = 10.592$ i $f(C) = 10.548{,}6$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtexs $B$; així doncs, han d'instal·lar 16 files de classe preferent i 48 files de classe turista per obtenir el benefici màxim, que és de 10.592 €



4 Una empresa fabrica dos productes P1 i P2 que es venen a 50 € i 44 € la unitat, respectivament. Per elaborar-los lloga dues màquines, M1 i M2, a un preu de 5 € per hora i 6 € per hora, respectivament. Les hores de funcionament de cada màquina que calen per a la fabricació d'una unitat de cada producte i la disponibilitat màxima setmanal de cada màquina estan expressades en la taula següent:

| | Producte P1 | Producte P2 | Disponibilitat |
|---|---|---|---|
| M1 | 2 hores | 4 hores | 80 hores |
| M2 | 4 hores | 2 hores | 100 hores |

El cost del material utilitzat en la fabricació d'una unitat del producte P1 és de 10 € i en una unitat del producte P2 és de 8 €. Es vol saber quantes unitats de cada producte s'han de fabricar per maximitzar el benefici.

a) Planteja el problema.

b) Troba'n la solució gràficament.

c) Analitza gràficament què passa si el preu de P2 es redueix en 2 €.

a) $x \longrightarrow$ nre. d'unitats del producte P1

$y \longrightarrow$ nre. d'unitats del producte P2

| | Producte P1 | Producte P2 | Disponibilitat | Preu per hora | |
|---|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 | 4 | 80 | 5 | $\longrightarrow 2x + 4y \leq 80$ |
| M2 | 4 | 2 | 100 | 6 | $\longrightarrow 4x + 2y \leq 100$ |
| Cost de material per unitat | 10 | 8 | | | |
| Preu de venda per unitat | 50 | 44 | | | |
| Cost de material + mà d'obra | 44 | 40 | | | |
| Benefici unitat | 6 | 4 | | | |

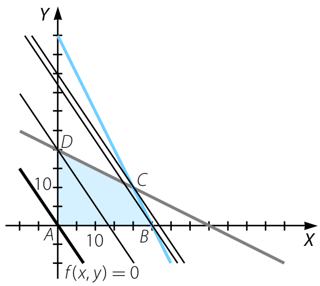
Despeses del producte P1 $\longrightarrow$ 10 € de producte + 2 hores de M1 · 5 €/hora + + 4 hores de M2 · 6 €/hora = 10 + 10 + 24 = = 44 €

Despeses del producte P2 $\longrightarrow$ 8 € de producte + 4 hores de M1 · 5 €/hora + + 2 hores de M2 · 6 €/hora = 8 + 20 + 12 = 40 €

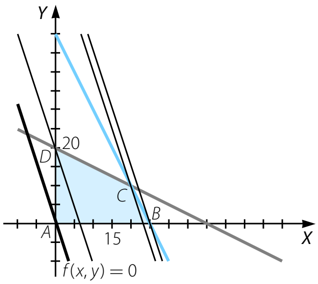
Maximitzar $f(x, y) = 6x + 4y$

Subjecte a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y \leq 80 \\ 4x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Obtenim una regió factible acotada amb vèrtexs $A(0, 0)$, $B(25, 0)$, $C(20, 10)$ i $D(0, 20)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en $C$. Això vol dir que han de fabricar 20 unitats del producte P1 i 10 unitats del producte P2 per maximitzar el benefici, que és de 160 €.




c) Si reduïm de 2 € el preu del producte P2, obtenim 42 €, en lloc de 44 €.
Com que el preu de cost continua sent de 40 €, el guany per unitat és de 2 € i, per tant, la funció objectiu és $f(x, y) = 6x + 2y$. Si tracem paral·leles a aquesta funció que passin per tots els vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $B$, és a dir, per maximitzar el benefici han de fabricar 25 unitats del producte P1 i cap unitat del producte P2. El valor és de 150 €.




5 **La candidatura d'un grup polític per a les eleccions municipals ha de complir els requisits següents: el nombre total de components de la candidatura ha d'estar comprès entre 6 i 18 i el nombre d'homes ($x$) no ha d'excedir del doble del nombre de dones ($y$).**

**a) Representa el recinte associat a aquestes restriccions i calcula'n els vèrtexs.**

**b) Quin és el nombre més gran d'homes que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions?**

a) $x \longrightarrow$ nombre d'homes
$y \longrightarrow$ nombre de dones

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6 \leq x + y \leq 18 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 6)$; $B(4, 2)$; $C(12, 6)$ i $D(0, 18)$.

b) Es tracta de maximitzar la funció, que és la que ens dóna el nombre d'homes. Substituïm els vèrtexs i obtenim $f(A) = 0$, $f(B) = 4$, $f(C) = 12$ i $f(D) = 0$; així doncs, 12 homes és el nombre màxim que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions de l'enunciat.