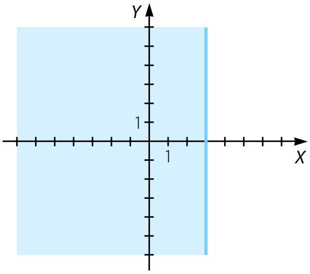
018 Resol gràficament les inequacions:

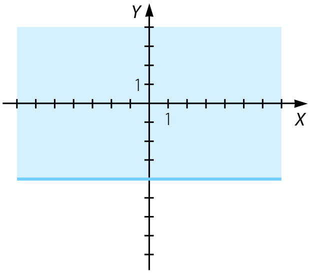
a) $x \leq 3$ b) $y > -4$ c) $x < 0$ d) $y \leq 5$

a)



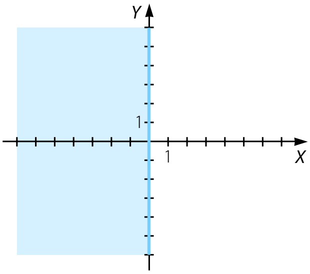
La recta $x = 3$ forma part de la solució.

b)



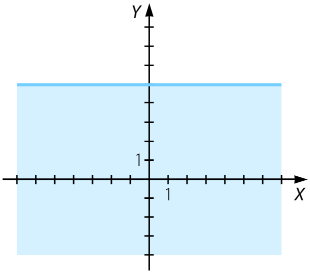
La recta $y = -4$ no forma part de la solució.

c)



La recta $x = 0$ no forma part de la solució.

d)

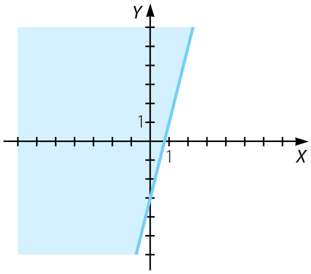


La recta $y = 5$ forma part de la solució.

019 Resol les següents inequacions lineals amb dues incògnites.

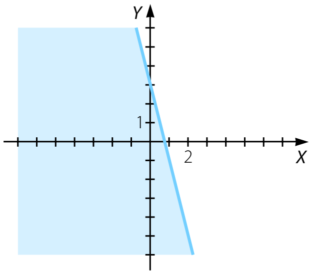
a) $4x - y < 3$ b) $4x + y \leq 3$ c) $-4x - y \geq 3$ d) $-4x + y > 3$

a)



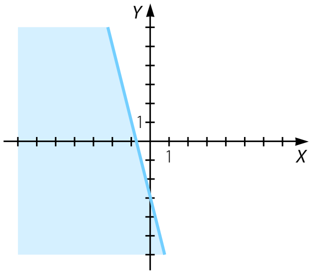
La recta $4x - y = 3$ no forma part de la solució.

b)



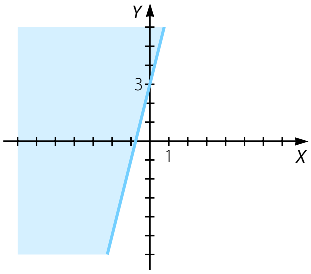
La recta $4x + y = 3$ forma part de la solució.

c)



La recta $-4x - y = 3$ forma part de la solució.

d)

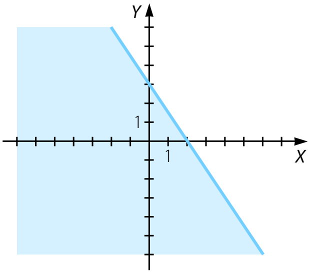


La recta $-4x + y = 3$ no forma part de la solució.

020 Resol gràficament aquestes inequacions:

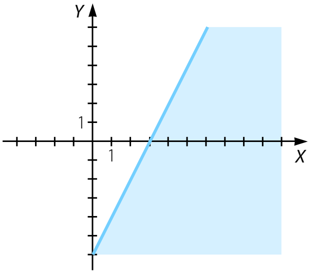
a) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1$ b) $\frac{2x-y}{3}>2$

a)



La recta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ forma part de la solució.

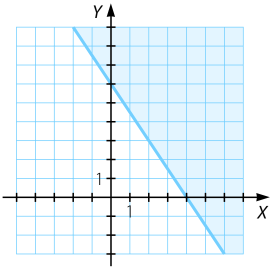
b)



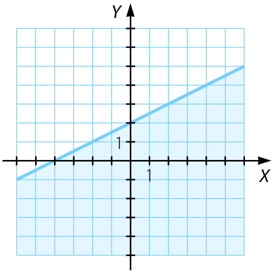
La recta $2x-y=6$ no forma part de la solució.

021 Determina les inequacions que tenen com a solucions els semiplans següents:

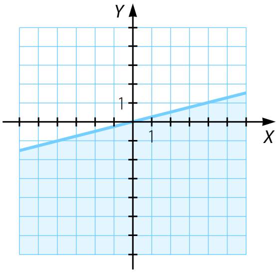
a)



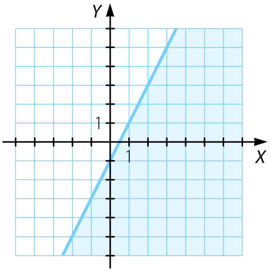
c)



b)



d)



a) Recta que passa per (4, 0) i (0, 6) $\rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$. La regió de punts no conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $y \geq \frac{-3}{2}x + 6$.

b) Recta que passa per (0, 0) i (4, 1) $\rightarrow y = \frac{1}{4}x$. La regió de punts conté el punt (0, −1); així doncs, la inequació és $x \geq 4y$.

c) Recta que passa per (0, 2) i (−4, 0) $\rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$. La regió de punts conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $2y \leq x + 4$.

d) Recta que passa per (1, 1) i (0, −1) $\rightarrow y = 2x - 1$. La regió de punts no conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $y \leq 2x - 1$.

022 Resol els sistemes d'inequacions següents:

a) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x \leq 5 \\ y \leq 5 \end{array}\right\}$

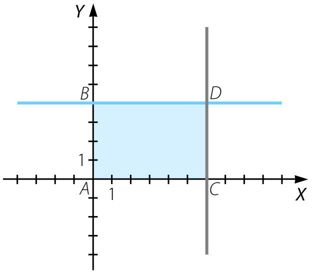
c) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x - 5y \geq 10 \end{array}\right\}$

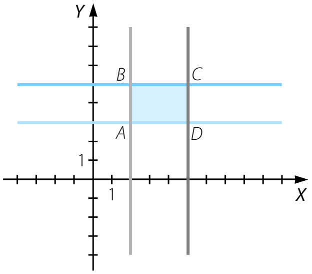
e) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \\ x + y \geq 8 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 0 \\ x - y \leq 7 \end{array}\right\}$

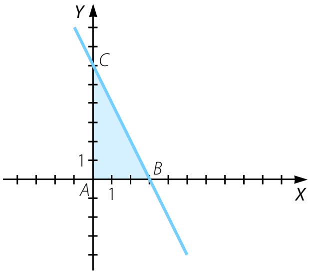
a) El sistema d'inequacions té com sa solució la regió del pla que té de vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 4)$; $C(6, 0)$ i $D(6, 4)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



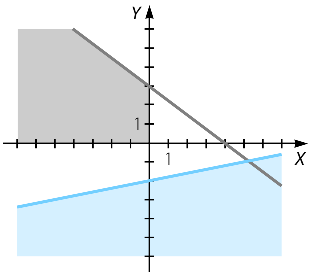
b) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que té de vèrtexs $A(2, 3)$; $B(2, 5)$; $C(5, 5)$ i $D(5, 3)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



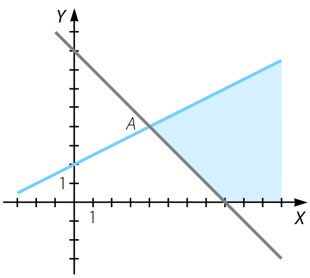
c) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que té de vèrtexs $A(0, 0)$; $B(3, 0)$ y $C(6, 0)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



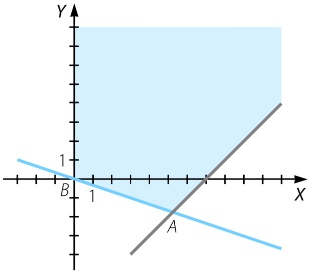
d) Com que $x \leq 0$ i $y \geq 0$, ens trobem al segon quadrant. I com que $3x + 4y \leq 12$ i $x - 5y \geq 10$ no tenen punts comuns en aquest quadrant, resulta que el sistema d'inequacions no té solució.



e) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que formen els punts del primer quadrant situats a la part inferior de $2x - y = 4$ i a la part superior de $x + y = 8$. El punt A, intersecció de les dues rectes, és $(4, 4)$. Els segments de recta també formen part de la solució.



f) El sistema d'inequacions té com a solució la regió de punts no acotada limitada a la part superior per la recta $x = 0$ i a la part inferior per les rectes $x + 3y = 0$ i $x - y = 7$. Els vèrtexs són $A\left(\frac{21}{4}, \frac{7}{4}\right)$ i $B(0, 0)$. Els segments de recta també formen part de la solució.

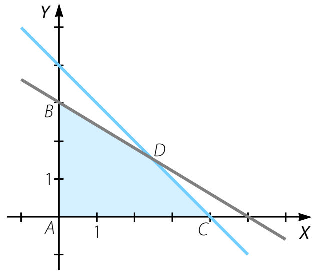


023 **Troba les regions del pla determinades pels sistemes d'inequacions i indica, en cada cas, si són acotades o no.**

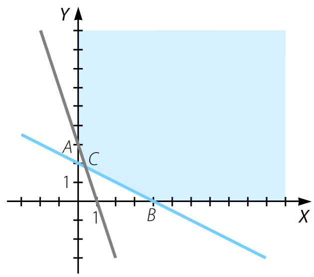
a) $\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x + y \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{array}\right\}$

a) La regió del pla que obtenim està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 0)$ i $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, que és la intersecció de les rectes $3x + 5y = 15$ i $x + y = 4$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la regió.



b) La regió del pla que obtenim no està acotada per la part superior i té com a vèrtexs $A(0, 3)$; $B(4, 0)$ i $C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, que és el punt d’intersecció de les rectes $3x + y = 3y$ i $x + 2y = 4$. Els segments de recta que delimiten la regió també en formen part.

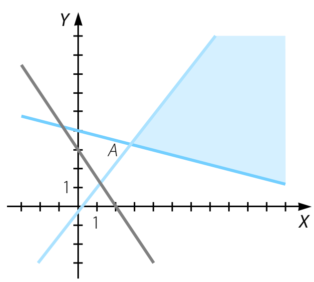


024 **Representa gràficament la regió determinada per aquest sistema d’inequacions. Hi sobra alguna inequació?**

$$\left.\begin{array}{l} x + 4y \geq 16 \\ 9x - 7y \geq 2 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La solució no està acotada per la dreta i té un únic vèrtex: $A\left(\frac{120}{43}, \frac{142}{43}\right)$, que és la intersecció de les rectes $x + 4y = 16$ i $9x - 7y = 2$. Està limitada per la part superior per la recta $9x - 7y = 2$ i per la part inferior, per la recta $x + 4y = 16$. Els segments de recta que delimiten la regió també en formen part.

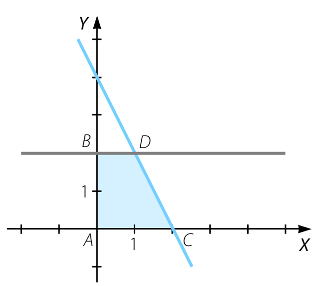
La inequació $3x + 2y \geq 6$ no influeix en la solució.



025 **Dibuixa la regió del pla definida per les inequacions següents:** $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ y + 2x \leq 4 \end{array}\right\}$

(Activitat de Selectivitat)

La solució està determinada per la regió del pla l imitada pels vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 2)$; $C(2, 0)$ i $D(1, 2)$. Els segments de recta que uneixen aquests vèrtexs també formen part de la solució.

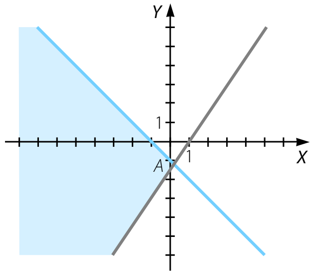


026 Representa la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 3 \\ x + \ \ y \leq -1 \end{cases}$$

Determina tres punts d'abscissa $x = -2$ i ordenada entera que siguin solució del sistema.

(Activitat de Selectivitat)



La solució no està acotada per l'esquerra i té un únic vèrtex: $A\left(\frac{1}{5}, \frac{-6}{5}\right)$, que és la intersecció de les rectes $3x - 2y = 3$ i $x + y = -1$.
Està limitada per la part superior per la recta $x + y = -1$ i per la part inferior, per la recta $3x - 2y = 3$. Els segments de recta també formen part de la regió.

Tres punts d'abscissa $x = -2$ i ordenada entera són: $(-2, -1)$; $(-2, -2)$ i $(-2, -3)$.

027 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 8 \\ x + \ \ y \geq 5 \\ x - 5y \leq 0 \end{array}\right\}$$

a) Soluciona'l gràficament.

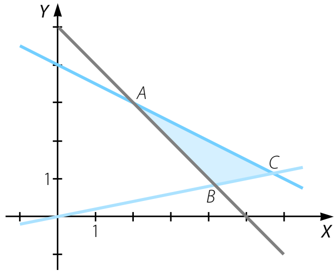
b) Troba'n totes les solucions enteres.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow A(2, 3)$

$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right)$



La solució del sistema d'inequacions és la regió del pla limitada pels vèrtexs *A*, *B* i *C*.

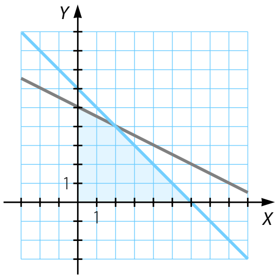
Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la regió.

b) Les solucions enteres d'aquest sistema són (4, 1); (3, 2); (2, 3); (4, 2) i (5, 1).

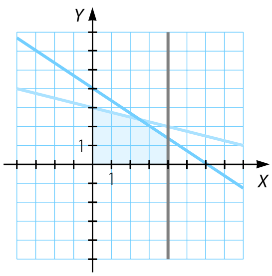
Sistemes d'inequacions lineals

028 **Determina un sistema d'inequacions per a cada solució representada en aquestes gràfiques:**

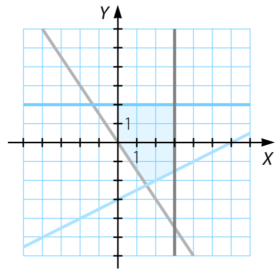
a)



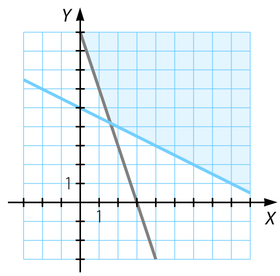
b)



c)



d)



a) Les equacions de les dues rectes són $x + y = 6$ i $x + 2y = 10$. El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió ombrejada és:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Les equacions de les tres rectes són $x = 4$; $x + 4y = 12$ i $3y + 2x = 12$. El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió ombrejada és:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$$

c) Les equacions de les quatre rectes són $x = 3$; $y = 2$; $x - 2y = 6$ i $2y + 3x = 0$. El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió ombrejada és:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 2 \geq y \\ x - 2y \leq 6 \\ 2y + 3x \geq 0 \end{array}\right\}$$

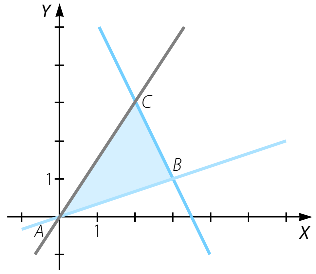
d) Les equacions de les dues rectes són $3x + y = 9$ i $x + 2y = 10$. El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió ombrejada és:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 10 \end{array}\right\}$$

029 **Determina un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla amb vèrtexs (0, 0), (2, 3) i (3, 1).**
(Activitat de Selectivitat)

- Recta que passa per (0, 0) i (2, 3) $\rightarrow 3x - 2y = 0$
- Recta que passa per (0, 0) i (3, 1) $\rightarrow x - 3y = 0$
- Recta que passa per (3, 1) i (2, 3) $\rightarrow 2x + y = 7$

La regió factible que dóna el triangle és:



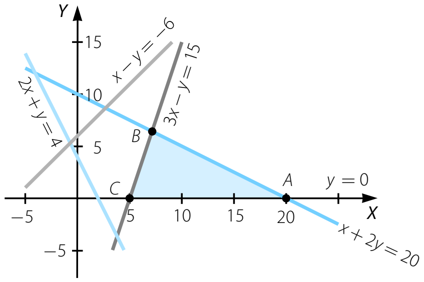
El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió factible és:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &\leq 7 \\ x - 3y &\leq 0 \\ 3x - 2y &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

030 **Representa gràficament el conjunt de punts que verifiquen el sistema d'inequacions següent:**

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2x + y &\geq 4 \\ 3x - y &\geq 15 \\ x + 2y &\leq 20 \\ x - 1 &\geq -6 \end{aligned}\right\}$$

Calcula els vèrtexs de la regió.

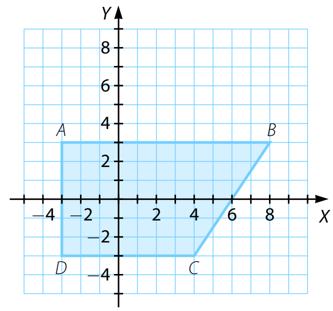


Els punts de tall són:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + y &= 20 \end{aligned}\right\} \rightarrow A(20, 0) \qquad \left.\begin{aligned} 3x - y &= 15 \\ x + 2y &= 20 \end{aligned}\right\} \rightarrow B\left(\frac{50}{7}, \frac{45}{7}\right) \qquad \left.\begin{aligned} 3x - y &= 15 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C(5, 0)$$

Sistemes d'inequacions lineals

031 **Escriu les inequacions que defineixen el recinte de la figura següent:**



Les rectes estan determinades per aquests punts:

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, 3) \\ B(8, 3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{AB}\colon y = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} B(8, 3) \\ C(4, -3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{Bc}\colon 3x - 2y = 18$$

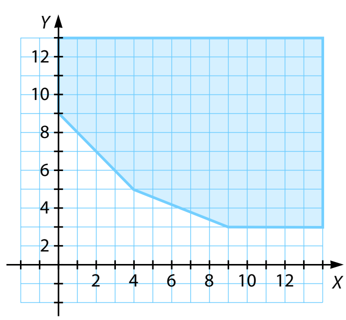
$$\left.\begin{array}{l} C(4, -3) \\ D(-3, -3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{CB}\colon y = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} D(-3, -3) \\ A(-3, 3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{DA}\colon x = -3$$

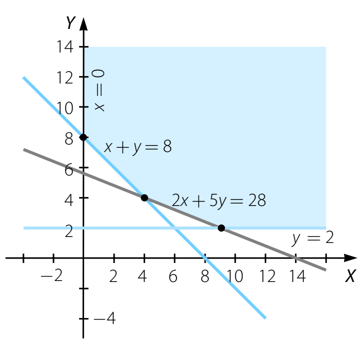
I el sistema d'inequacions és el següent:

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

032 **Escriu el sistema d'inequacions que defineixen el recinte d'aquesta figura:**



Les rectes que defineixen la regió són les següents:



I el sistema és:

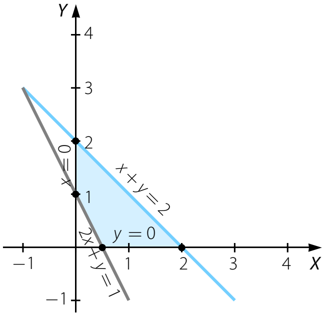
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

033 Dibuixa la regió del pla formada pels punts (x, y) que compleixen les desigualtats següents:

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

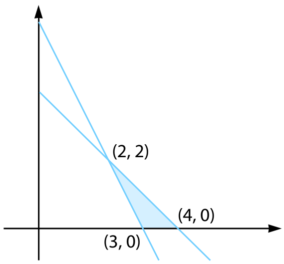
(Explica detalladament per què el dibuix que has fet correspon a la regió demanada.)

(Activitat de Selectivitat)



034 a) Escriu l'equació a de les tres rectes del pla que limiten la regió puntejada del dibuix.

b) Escriu les tres desigualtats que determinen aquesta regió.



(Activitat de Selectivitat)

a) Equacions de les rectes

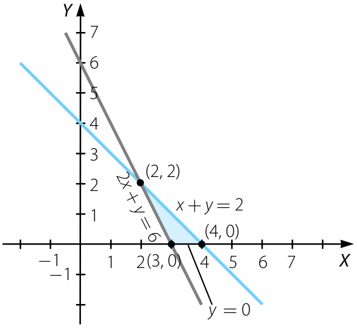
$$\left.\begin{array}{l} A(2, 2) \\ B(3, 0) \end{array}\right\} \rightarrow r_{AB}: 2x + y = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} B(3, 0) \\ C(4, 0) \end{array}\right\} \rightarrow r_{Bc}: y = 0$$

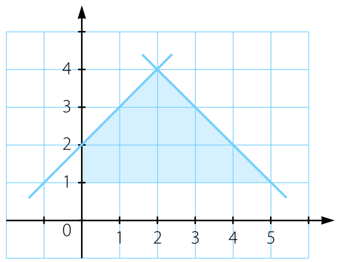
$$\left.\begin{array}{l} C(4, 0) \\ A(2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow r_{CB}: x + y = 4$$

b) Sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$$



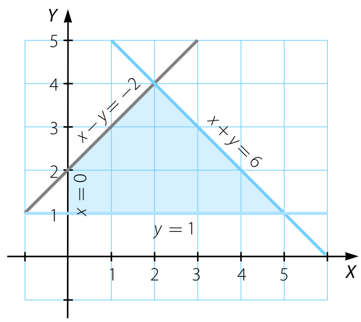
035 Determina el sistema de quatre inequacions amb dues incògnites que té per solució el polígon ombrejat dibuixat a la gràfica següent, suposant que els costats també són solució.



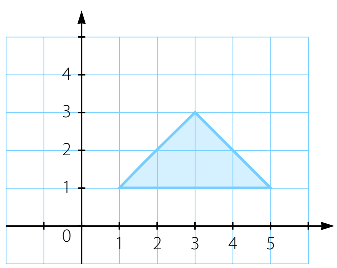
(Activitat de Selectivitat)

Sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ x - y \geq -2 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$



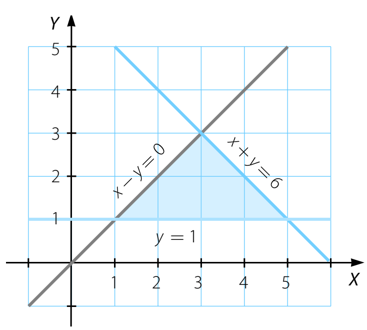
036 Determina el sistema de tres inequacions i dues incògnites que té per solució el triangle assenyalat en la gràfica següent, suposant que els costats del triangle també formen part de la solució.



(Activitat de Selectivitat)

Sistema:

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$



037 Troba un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs (0, 1), (2, 0) i (3, 4).

(Activitat de Selectivitat)

Busquem les rectes:

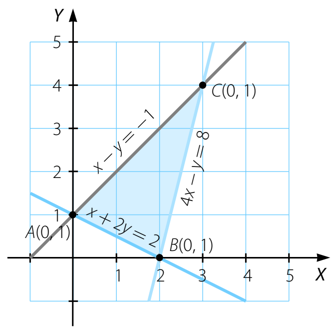
$$\left.\begin{array}{r} A(0, 1) \\ B(2, 0) \end{array}\right\} \rightarrow r_{AB}\colon y = x + 2y = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} B(2, 0) \\ C(3, 4) \end{array}\right\} \rightarrow r_{BC}\colon 4x - y = 8$$

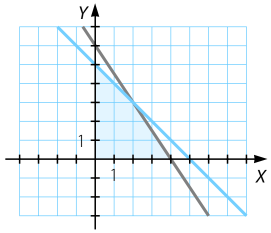
$$\left.\begin{array}{r} C(3, 4) \\ A(0, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r_{CA}\colon x - y = -1$$

Sistema:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 4x - y \leq 8 \\ x - y \geq 1 \end{cases}$$



038 Considera la regió factible següent:



Troba els punts en els quals les funcions agafen els valors màxims.

a) $f(x, y) = 3x + y$ b) $f(x, y) = x + 2y - 1$ c) $f(x, y) = 3x + 2y - 1$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(4, 0)$; $C(2, 3)$ i $D(0, 5)$.

a) Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 12$; $f(C) = 9$ i $f(D) = 5$, el màxim s'aconsegueix en el punt B i val 12.

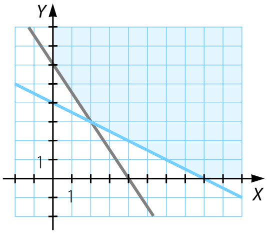
b) Com que $f(A) = -1$; $f(B) = 3$; $f(C) = 7$ i $f(D) = 9$, el màxim s'aconsegueix en el punt D i val 9.

c) Com que $f(A) = -1$; $f(B) = 11$; $f(C) = 11$ i $f(D) = 9$, el màxim s'aconsegueix en els punts B i C i en tots els del segment BC, i val 11.

Sistemes d'inequacions lineals

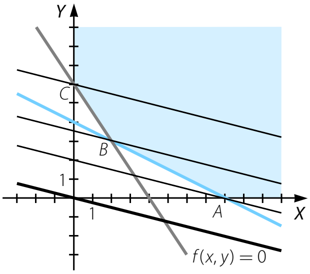
039 Calcula els punts de la regió on s'assoleix el valor mínim d'aquestes funcions.

a) $f(x, y) = x + 4y$
b) $f(x, y) = x + y + 4$

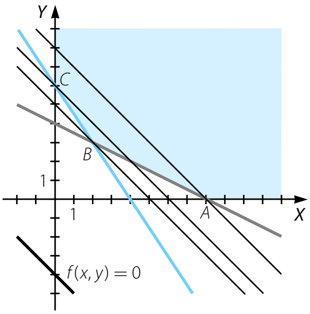


La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(8, 0)$; $B(2, 3)$ i $C(0, 6)$.

a) Si tracem paral·leles a la funció objectiu $f(x, y) = x + 4y$, que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en $A(8, 0)$ i val 8.

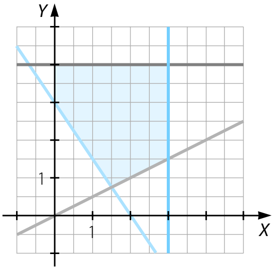


b) Si tracem paral·leles a la funció objectiu $f(x, y) = x + y + 4$, que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en $B(2, 3)$ i val 9.



040 Donada la regió factible, determina el màxim i el mínim de les funcions següents:

a) $f(x, y) = 2x + y$
b) $f(x, y) = 3x + 2y - 3$



La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$; $B\left(3, \frac{3}{2}\right)$; $C(3, 4)$; $D(0, 4)$ i $E(0, 3)$.

a) Si substituïm els vèrtexs a la funció objectiu, obtenim que $f(A) = \frac{15}{4}$; $f(B) = \frac{15}{2}$; $f(C) = 10$; $f(D) = 4$ i $f(E) = 3$, per tant, el màxim s'aconsegueix en C i val 10, i el mínim s'aconsegueix en E i val 3.

b) Si substituïm els vèrtexs a la funció objectiu, obtenim que $f(A) = 3$; $f(B) = 9$; $f(C) = 14$; $f(D) = 5$ i $f(E) = 3$, així doncs, el màxim s'aconsegueix en C i val 14, i el mínim s'aconsegueix en A i E i, per tant, en tots els punts del segment AE, i val 3

041 **a) Representa gràficament la regió determinada per les restriccions següents:**

$$2x + y \leq 6 \qquad -x + y \leq 3 \qquad 4x + y \leq 10 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

i determina'n els vèrtexs.

b) Calcula el màxim de la funció $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinte anterior i indica on s'assoleix.

(Activitat de Selectivitat)

a) Regió factible acotada amb aquests vèrtexs:

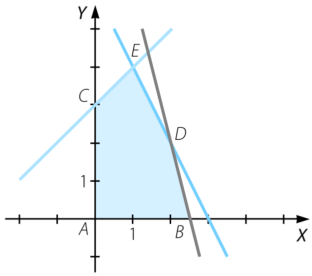
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + y = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{10}{4}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ -x + y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow D(2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow E(1, 4)$$



b) Com que la regió factible està acotada, el màxim de la funció $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ s'aconsegueix en un dels vèrtexs.
I com que $f(A) = -3$; $f(B) = 7$; $f(C) = 3$; $f(D) = 9$ i $f(E) = 9$, el màxim s'aconsegueix en els vèrtexs D i E i, per tant, en tots els punts del segment DE, i val 9.

042 D'un problema de programació lineal es dedueixen les restriccions següents:

$$4x + 3y \geq 12 \qquad y \leq 30 \qquad x \leq \frac{10+y}{2} \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

a) Representa gràficament la regió factible del problema i calcula'n els vèrtexs.

b) Maximitza en aquesta regió factible la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$.

c) El punt (11, 10) pertany a la regió factible?

(Activitat de Selectivitat)

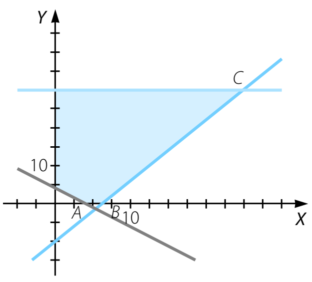
a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(3, 0)$

$\left.\begin{array}{l} 2x = 10 + y \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 0)$

$\left.\begin{array}{l} 2x = 10 + y \\ y = 30 \end{array}\right\} \rightarrow C(20, 30)$

$\left.\begin{array}{l} y = 30 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D(0, 30)$

$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E(0, 4)$



b) El màxim de la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$ s'aconsegueix en un dels vèrtexs. Com que $F(A) = 3$; $F(B) = 5$; $F(C) = 110$; $F(D) = 90$ i $F(E) = 12$, el màxim s'aconsegueix en C i té un valor de 110.

c) El punt (11, 10) no pertany a la regió factible.

043 a) Troba els vèrtexs de la regió determinada per les inequacions següents:

$$3x + y \leq 60 \qquad x - 2y \geq -3 \qquad y \geq \frac{x}{2} - 2 \qquad 2x + 3y \geq 1$$

b) Calcula els punts de la regió on la funció $f(x, y) = 3x - 2y$ assoleix els valors màxim i mínim i determina'ls.

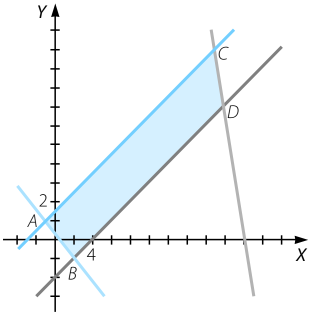
(Activitat de Selectivitat)

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A(-1, 1)$

$\left.\begin{array}{l} 2y = x - 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow B(2, -1)$

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\frac{117}{7}, \frac{69}{7}\right)$

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow D\left(\frac{124}{7}, \frac{48}{7}\right)$



b) Com que la regió està acotada, el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = 3x - 2y$ s'aconsegueixen en els vèrtexs.

I com que $f(A) = -5$; $f(B) = 8$; $f(C) = \frac{213}{7}$ i $f(D) = \frac{276}{7}$, el màxim s'aconsegueix en D i té un valor de $\frac{276}{7}$, i el mínim s'aconsegueix en A i té un valor de -5.

044 **Determina els valors màxim i mínim de la funció $z = 5x + 3y$ subjecta a les restriccions:**

$$3x + y \geq 4 \quad x + y \leq 6 \quad 0 \leq y \leq 5 \quad x \leq 5$$

(Activitat de Selectivitat)

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs:

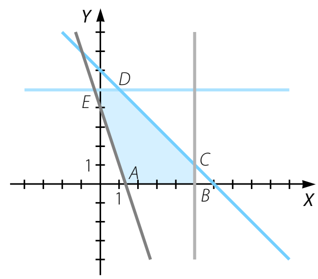
$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow C(5, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow D(1, 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow E\left(\frac{-1}{3}, 5\right)$$



$f(A) = \frac{20}{3}$

$f(B) = 15$

$f(C) = 28$

$f(D) = 18$

$f(E) = \frac{40}{3}$

El mínim s'aconsegueix en el vèrtex A i té un valor de $\frac{20}{3}$, i el màxim s'aconsegueix en C i té un valor de 28.

045 **Considera el sistema d'inequacions següent:** $\left.\begin{array}{r} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{array}\right\}$

a) Representa gràficament la regió factible.

b) Calcula el màxim de la funció $f(x, y) = x - 3y$ en aquesta regió.

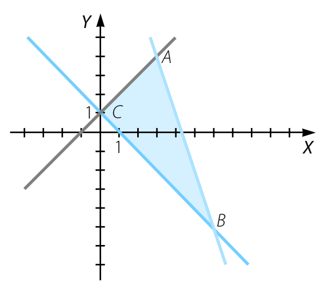
(Activitat de Selectivitat)

a) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs els punts:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(3, 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 13 \end{array}\right\} \rightarrow B(6, -5)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 1)$$



b) Substituïm els vèrtexs en la funció objectiu: $f(A) = -9$; $f(B) = 21$ i $f(C) = -3$. S'aconsegueix el màxim en el vèrtex $B(6, -5)$ i té un valor de 21.

046 Es vol minimitzar la funció lineal: $3x + 4y + 2(10 - x) + 3(18 - y)$ amb les restriccions:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 10 - x \geq 0 \qquad 18 - y \geq 0$$
$$x + y \leq 13 \qquad (10 - x) + (18 - 2y) \leq 16$$

Es demana:

a) Representació gràfica del conjunt factible.

b) Trobar les coordenades de tots els seus vèrtexs.

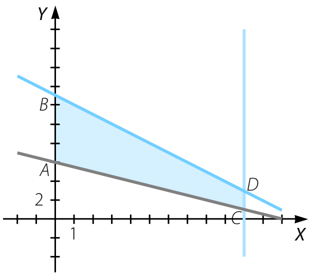
c) Trobar totes les solucions òptimes.

(Activitat de Selectivitat)

a) $(10 - x) + (18 - 2y) = 16 \rightarrow x + 2y = 12$

b) Els vèrtexs són $A(0, 6)$; $B(0, 13)$; $C(10, 1)$ i $D(10, 3)$.

c) Com que la regió factible està acotada, la funció objectiu aconsegueix les solucions òptimes en els vèrtexs. I com que $f(A) = 80$; $f(B) = 87$; $f(C) = 85$ i $f(D) = 87$, el mínim s'aconsegueix en A, i té un valor de 80, i el màxim s'aconsegueix en B i D i, per tant, el valor és 87.



047 Considerem el recinte pla limitat per les inequacions següents:

$$x - y \leq 4 \quad y + 2x \geq 7 \quad -2x - y + 13 \geq 0 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

a) Representa el recinte i calcula'n els vèrtexs.

b) Troba en quins punts d'aquest recinte la funció $F(x, y) = 4x + 2y - 1$ assoleix els valors màxim i mínim.

(Activitat de Selectivitat)

a) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs:

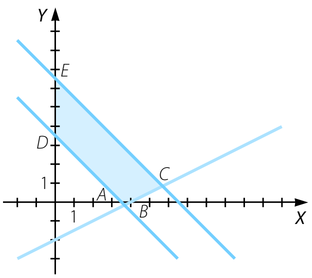
$$\left.\begin{array}{l} y + 2x = 7 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow B(4, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x - y + 13 = 0 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y + 2x = 7 \end{array}\right\} \rightarrow D(0, 7)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ -2x - y + 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E(0, 13)$$



b) Com que la regió està acotada, les solucions màximes s'aconsegueixen en els vèrtexs. I com que $f(A) = 13$; $f(B) = 15$; $f(C) = 25$; $f(D) = 13$ i $f(E) = 25$, el màxim s'aconsegueix en C i E i, per tant, en tots els punts del segment CE, i té un valor de 25, i el mínim s'aconsegueix en els vèrtexs D i A i, per tant, el valor és 13.

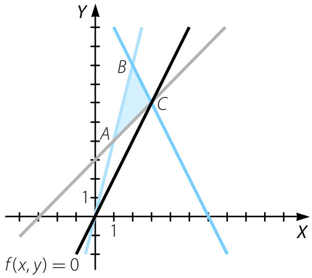
048 Representa el recinte definit per les inequacions:

$$0 \leq y \leq 4x \qquad y \geq x + 3 \qquad y + 2x - 12 \leq 0$$

i troba els valors màxim i mínim de la funció $F(x, y) = y - 2x$ en aquest recinte.

(Activitat de Selectivitat)

La regió està acotada per les rectes $y = 4x$; $y = x + 3$; $y + 2x - 12 = 0$, i té com a vèrtexs $A(1, 4)$; $B(2, 8)$ i $C(3, 6)$.



Com que $f(A) = 2$; $f(B) = 4$ i $f(C) = 0$, el màxim s'aconsegueix en B i val 4, i el mínim s'aconsegueix en C i val 0.

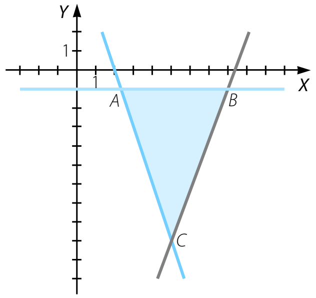
049 Considera $T = \{(x, y) / y + 3x \geq 6,\ y + 1 \leq 0,\ 8x - 3y \leq 67\}$ i $f(x, y) = 3y - 8x$.

a) Representa gràficament la regió T.

b) Calcula el valor màxim i el mínim, si existeixen, de la funció $f(x, y)$ en T i digues en quins punts s'assoleixen.

(Activitat de Selectivitat)

a) La regió T està acotada per les rectes $y + 3x = 6$; $y + 1 = 0$; $8x - 3y = 67$, i té com a vèrtexs $A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$; $B(8, -1)$ i $C(5, -9)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la solució.



b) Com que la regió factible està acotada, el màxim i el mínim de la funció objectiu s'aconsegueixen en els vèrtexs. I com que $f(A) = \frac{47}{3}$; $f(B) = -67$ i $f(C) = -67$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex A, amb valor $\frac{47}{3}$, i el mínim s'aconsegueix en els vèrtexs B i C i, per tant, en tots els punts del segment BC, i té valor -67.

Sistemes d'inequacions lineals

050 Considera el sistema d'inequacions següent:

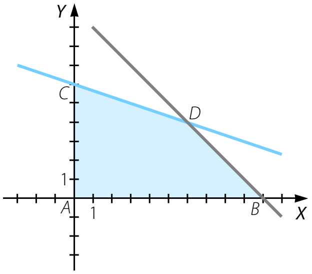
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 10 \end{array}\right\}$$

a) Representa gràficament la regió de solucions.

b) Determina el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 5y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.

c) Determina el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 3y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix.

(Activitat de Selectivitat)



a) Es tracta d'una regió acotada, limitada per les rectes $x = 0$; $y = 0$; $x + 3y = 18$; $x + y = 10$, i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(10, 0)$; $C(0, 6)$ i $D(6, 4)$. Els punts dels segments de recta que uneixen els vèrtexs pertanyen a la solució del sistema d'inequacions.

b) Com que la regió factible està acotada, el màxim de la funció objectiu $f(x, y) = 3x + 5y$ i s'aconsegueix en un dels vèrtexs. I com que $f(A) = 0$; $f(B) = 30$; $f(C) = 30$ i $f(D) = 38$, el màxim s'aconsegueix en D i té valor 38.

c) Igual que a l'apartat anterior, la regió factible està acotada. Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 30$; $f(C) = 18$ i $f(D) = 30$, el màxim s'aconsegueix en els punts B i D i, per tant, a tots els punts del segment BD. Té valor 33.

051 Considera la funció $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunt:

$$A = \{(x,\ y)/3x + y \geq 15,\ y - x \leq -5,\ 2x + 3y \leq 60,\ y \geq 0\}$$

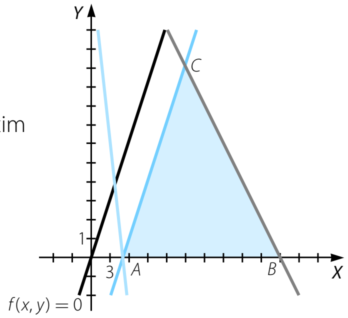
i calcula el valor màxim de $f(x, y)$ en A. Es podria eliminar alguna de les desigualtats que defineixen el conjunt A de manera que encara fos el mateix conjunt?

b) Digues si la funció $f(x, y)$ assoleix valor màxim en el conjunt:

$$B = \{(x,\ y)/3x + y \leq 15,\ x - y \geq 5,\ x \geq 0\}$$

En cas afirmatiu, calcula aquest valor.

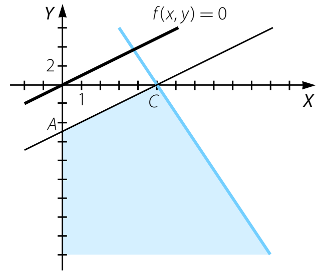
(Activitat de Selectivitat)



a) El conjunt A està acotat i té com a vèrtexs $B(30, 0)$; $C(15, 10)$ i $D(5, 0)$. La funció $f(x, y) = x - y$ aconsegueix el màxim en algun dels vèrtexs. Com que $f(B) = 30$; $f(C) = 5$ i $f(D) = 5$, el màxim s'aconsegueix en B i val 30.

Podem eliminar la inequació $3x + y \geq 15$, de manera que continuarem tenint el mateix conjunt.

b) El conjunt B no està acotat i té com a vèrtexs $A(0, -5)$ i $C(5, 0)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, comprovem que la recta $x - y = 5$ passa per A i C, i obtenim en aquests vèrtexs el valor mínim. Així doncs, la funció objectiu no aconsegueix el màxim en el conjunt B.



052 **En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs (1, 1), (1, 3), (3, 3) i (3, 1), i la funció objectiu és $B(x, y) = 3x + 2y$.**

a) Determina en quin punt la funció objectiu és màxima i quin és aquest valor màxim.

b) Dóna un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions.

(Activitat de Selectivitat)

a) Com que el quadrat és una regió acotada, la funció objectiu aconseguirà els extrems en els vèrtexs. I com que $B(1, 1) = 5$; $B(1, 3) = 9$; $B(3, 3) = 15$ i $B(3, 1) = 11$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex (3, 3) i val 15.

b) Les rectes que delimiten un quadrat de vèrtexs (1, 1); (1, 3); (3, 3) i (3, 1), són $x = 1$; $y = 1$; $x = 3$ i $y = 3$.

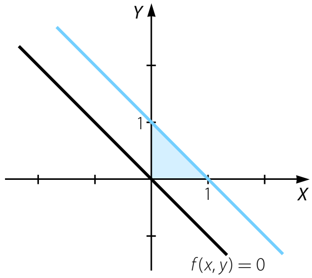
El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió interna del quadrat és: $\left.\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{array}\right\}$

053 **En un problema de programació lineal, la regió factible és el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs: (0, 0), (0, 1) i (1, 0). La funció objectiu és paral·lela a la recta $x + y = 0$. Troba els punts en els quals la funció objectiu assoleix:**

a) El mínim. **b) El màxim.**

(Activitat de Selectivitat)

El triangle de vèrtexs (0, 0), (0, 1) i (1, 0) està limitat per les rectes $x = 0$; $y = 0$ i $x + y = 1$.



Si tracem paral·leles a $x + y = 0$ que passin pels vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en (0, 0) i val 0, i el màxim s'aconsegueix en tots els punts del segment que uneix (0, 1) i (1, 0), i val 1.

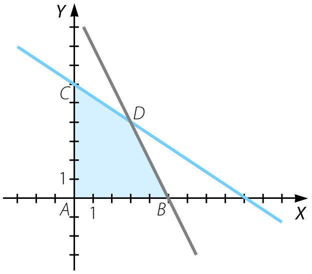
054 Sigui la funció $f(x, y) = ax + by$. Si es consideren les restriccions següents:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 18 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

determina la relació que ha d'existir entre a i b perquè el màxim de la funció $f(x, y)$ s'assoleixi en el punt (3, 4).

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(5, 0)$; $C(0, 6)$ i $D(3, 4)$.

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 5a$; $f(C) = 6b$ i $f(D) = 3a + 4b$, i situem el màxim en D, ha de passar que:



$$\left.\begin{array}{l} 3a + 4b \geq 0 \\ 3a + 4b \geq 5a \\ 3a + 4b \geq 6b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a \geq -4b \\ 4b \geq 2a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b \geq a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\}$$

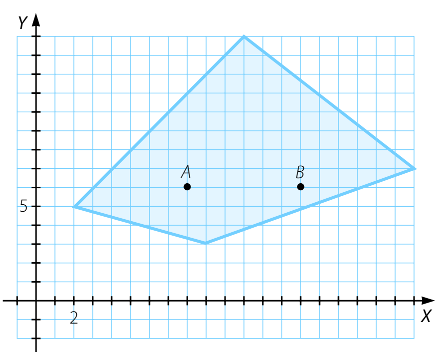
$$\rightarrow 3a \geq 2b \geq a$$

que és la relació que ens demanen per a a i b com a paràmetres positius.

Els casos següents no poden tenir lloc:

- a i b no poden ser 0, perquè no obtindríem una funció de la forma $ax + by$.
- a i b no poden tenir signes oposats, perquè la funció objectiu no aconseguiria el seu màxim en D.
- a i b no poden ser tots dos negatius, perquè no es compliria la primera de les restriccions anteriors.

055 La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x, y) = ax - by + c$, on a, b, c són nombres positius. Esbrina en quin dels dos punts A o B del gràfic la funció objectiu pren un valor més gran. Raona la resposta.



(Activitat de Selectivitat)

Com que la funció objectiu és $f(x, y) = ax - by + c$, amb a, b i c nombres positius, si substituïm els punts A(8, 6) i B(14, 6) comprovem que el màxim s'aconsegueix en B.

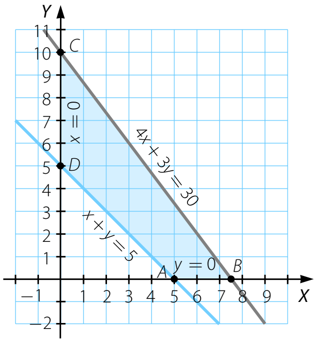
056 Representa gràficament la regió factible determinada per les desigualtats següents:

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\geq 5 \\ 4x + 3y &\leq 30 \end{aligned}\right\}$$

Calcula la solució que fa mínima la funció objectiu $z = x + 2y$ sotmesa a les restriccions anteriors.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió factible:



Punts de tall:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow A(5, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 30 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow B\left(\frac{15}{2}, 0\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 30 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C(0, 10)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow D(0, 5)$$

Valors de la funció en els vèrtexs:

$$z = x + 2y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 5 + 2 \cdot 0 = 5 \\ z(B) = \dfrac{15}{2} + 2 \cdot 0 = \dfrac{15}{2} \\ z(C) = 0 + 2 \cdot 10 = 20 \\ z(D) = 0 + 2 \cdot 5 = 10 \end{cases}$$

La funció $z = x + 2y$ es fa mínima en el punt $A(5, 0)$.

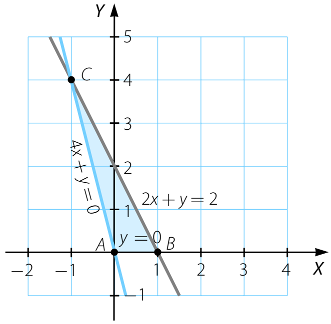
057 Dibuixa la regió del pla determinada per les desigualtats

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 2 \\ 4x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Calcula després el màxim de la funció $z = x + y$ en aquesta regió.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió:



Punts de tall:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(1, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + y = 0 \\ 2 + +y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow C(-1, 4)$$

Valors de la funció en els vèrtexs:

$$z = x + y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 0 + 0 = 0 \\ z(B) = 1 + 0 = 1 \\ z(C) = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

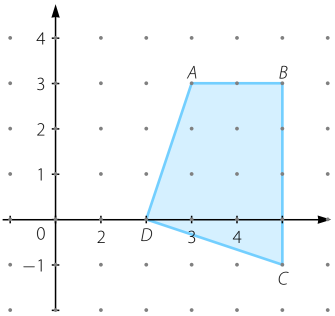
La funció $z = x + y$ es fa màxima en el punt $C(-1, 4)$.

058 El quadrilàter *ABCD* és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals. Els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució.

a) Troba el valor màxim i el mínim de la funció $F(x, y) = x + 3y$ en aquesta regió.

b) En quins punts de la regió solució la funció de l'apartat anterior assoleix el màxim i en quins, el mínim?

(Activitat de Selectivitat)



a) Les rectes que defineixen el recinte són:

$$\left.\begin{array}{r} A(3, 3) \\ B(5, 3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{AB}: y = 3$$

$$\left.\begin{array}{r} B(5, 3) \\ C(5, -1) \end{array}\right\} \rightarrow r_{Bc}: x = 5$$

$$\left.\begin{array}{r} C(5, -1) \\ D(2, 0) \end{array}\right\} \rightarrow r_{CB}: x + 3y = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} D(2, 0) \\ A(3, 3) \end{array}\right\} \rightarrow r_{DA}: 3x + y = 6$$

La funció agafa els valors òptims en punts del contorn del recinte. Per tant, calculem el valor de la funció en aquests punts:

$$z = x + 3y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 3 + 3 \cdot 3 = 12 \\ z(B) = 5 + 3 \cdot 3 = 14 \\ z(C) = 5 + 3 \cdot (-1) = 2 \\ z(D) = 2 + 3 \cdot 0 = 2 \end{cases}$$

Valor màxim: 14; valor mínim: 2.

b) Punts on s'obtenen els valors òptims:

Màxim: punt B.

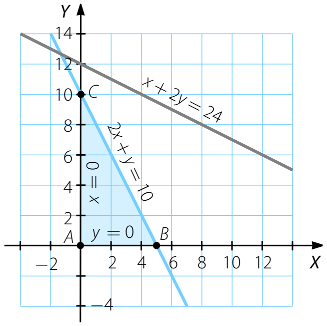
Mínim: en qualsevol punt del segment CD.

059 **Maximitza la funció $f(x, y) = 2x - 3y$ amb les restriccions:**

$$x + 2y \leq 24$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió definida per les restriccions:



Punts de tall:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 10 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 10)$$

Valor màxim de la funció:

$$z = 2x - 3y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \\ z(B) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 10 \\ z(C) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 10 = -30 \end{cases}$$

El valor màxim s'obté en el punt $B(5, 0)$ i val 10.

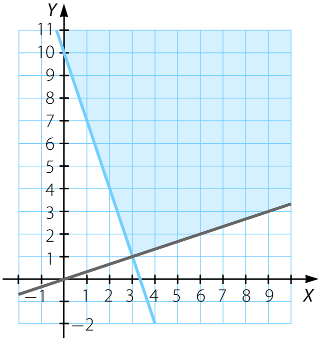
060 a) Determina la regió solució del sistema i el seu vèrtex:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{array}\right\}$$

b) Calcula el valor de la funció $F(x, y) = x - 4y$ en el vèrtex i explica raonadament si correspon a un extrem de $F(x, y)$ i de quina classe és.

(Activitat de Selectivitat)

a) Regió i vèrtex:



El vèrtex és el punt $P(3, 1)$.

b) Tipus de valor: El valor de la funció en el punt $P(3, 1)$ és $F(3, 1) = 3 - 4 \cdot 1 = -1$. Com que serà un extrem, calculem el valor en un altre punt, per exemple en el punt $Q(5, 3) \rightarrow f(5, 3) = 5 - 4 \cdot 3 = -7$, que és més petit que en P; així doncs, en el punt P s'aconsegueix el màxim de la funció $F(x, y) = x - 4y$.

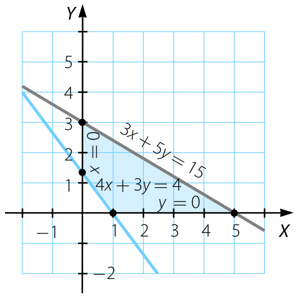
061 Calcula en quins punts de la regió determinada pel sistema d'inequacions

$$\left.\begin{aligned} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 4x + 3y - 4 \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \end{aligned}\right\}$$

la funció $F(x, y) = \dfrac{4x}{3} + y$ pren els seus valors màxim i mínim, i quins són aquests valors.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió definida per les inequacions:



Els punts de tall són:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 15 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A(5, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 15 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow B(0, 3)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 4 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 4 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow D(1, 0)$$

Els valors de la funció en aquests punts són:

$$F(x, y) = \frac{4}{3}x + y \rightarrow \begin{cases} F(A) = \dfrac{20}{3} \\ F(B) = 3 \\ F(C) = \dfrac{4}{3} \\ F(D) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Màxim: Punt $A(5, 0)$. Valor $\dfrac{20}{3}$.

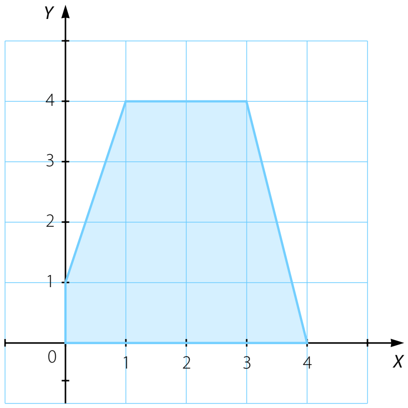
Mínim: Segment: $\overline{CD}$. Valor: $\dfrac{4}{3}$.

Sistemes d'inequacions lineals

PREPARA LA SELECTIVITAT

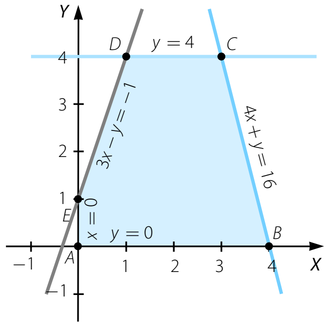
(Activitats de Selectivitat)

1 Escriu un sistema de quatre inequacions (amb dues variables x i y) de tal manera que la regió del pla que determini aquest sistema sigui la regió ombrejada del dibuix següent:



Sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 4x + y &\leq 16 \\ y &\leq 4 \\ 3x - y &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$

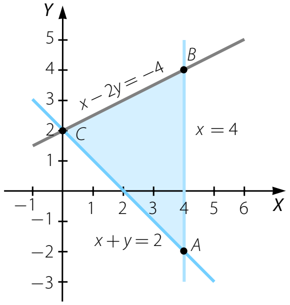


2 a) Representa gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x &\leq 4 \\ x + y &\geq 2 \\ x - 2y + 4 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

b) Calcula el mínim de la funció $F(x, y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

a) Gràfica de la regió solució:



b) El mínim s'aconsegueix en punt del contorn de la regió. Calculem els vèrtexs:

$$\left.\begin{array}{r} x = 4 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow A(4, -2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 4 \\ x + 2y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow B(4, 4)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -4 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 2)$$

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$F(x, y) = x - 2y \rightarrow \begin{cases} F(4, -2) = 4 - 2(-2) = 8 \\ F(4, 4) = 4 - 2 \cdot 4 = -4 \\ F(0, 2) = 0 - 2 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

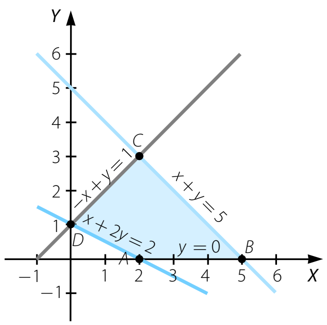
Així doncs, el mínim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{AC}$.

3 **Dibuixa la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següent:**

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

i calcula el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + 2y$ en aquesta regió.

Regió:



Punts de tall:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow A(2, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow C(2, 3)$$

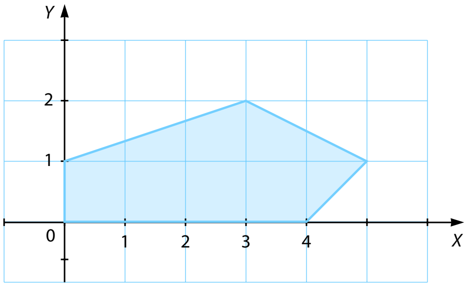
$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow D(0, 1)$$

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$f(x, y) = 2x + 2y \rightarrow \begin{cases} F(2, 0) = 4 \\ F(5, 0) = 10 \\ F(2, 3) = 10 \\ F(0, 1) = 2 \end{cases}$$

Per tant, el màxim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{BC}$.

4 **Troba els punts de la regió del dibuix on la funció $F(x, y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digues quin és aquest valor màxim.**



El valor òptim d'una funció s'obté en un punt del contorn:

$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 5$

$B(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 13$

$C(5, 1) \rightarrow F(5, 1) = 19$

$D(3, 2) \rightarrow F(3, 2) = 19$

$E(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 9$

Per tant, el màxim de la funció s'obté en qualsevol punt del segment $\overline{CD}$.
i el seu valor és 19.

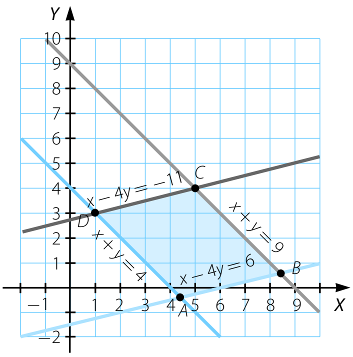
5 **Considera el sistema d'inequacions següent:**

$$\left.\begin{aligned} x - 4y &\geq -11 \\ x + y &\geq 4 \\ x - 4y &\leq -6 \\ x + y &\leq 9 \end{aligned}\right\}$$

a) **Dibuixa la regió de solucions del sistema.**

b) **Una funció objectiu $f(x, y) = ax + by + c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt (4, 15/4). Digues si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determina'ls.**

a) Regió solució:



Punts de tall:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - 4y &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow A\left(\frac{22}{5}, \frac{-2}{5}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - 4y &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow B\left(\frac{42}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - 4y &= -11 \end{aligned}\right\} \rightarrow C(4, 4)$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - 4y &= -11 \end{aligned}\right\} \rightarrow D(1, 3)$$

La funció agafa el valor mínim en el punt $E\left(4, \frac{15}{4}\right)$, que és un punt del segment $\overline{CD}$, per la qual cosa agafarà aquest mateix valor mínim en qualsevol dels punts del segment $\overline{CD}$.