021 Resol mitjançant el mètode de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=1\\4x+7y+13z=-1\\2x+3y+7z=-3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}3y+z=3\\3x+4y\qquad=11\\-2x\qquad+2z=-8\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}3x-y+2z=7\\-x+2y+5z=-2\\3x+4y+19z=8\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x+2y+z=1\\x+y-z=1\\2x+3y+z=1\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l}x-2y-z=-1\\x-y+2z=2\\x+2y+z=3\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}2a-4b-c=-7\\-3a+2b-3c=-4\\-a-3b-8c=-12\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}5x+2y+3z=5\\-x+3y-2z=12\\x+y+z=2\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l}-p+3q-r=12\\3p\qquad+2r=7\\5p-6q+4r=5\end{array}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\4&7&13&-1\\2&3&7&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\0&1&3&-3\\0&0&2&-4\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=1\\y+3z=-3\\2z=-4\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\1&1&-1&1\\2&3&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&-1&-1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=1\\-y-2z=0\\z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=-1\end{array}\right.$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&3&5\\-1&3&-2&12\\1&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\-1&3&-2&12\\5&2&3&5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&-3&-2&-5\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&0&-11&22\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\4y-z=14\\-11z=22\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|c}0&3&1&3\\3&4&0&11\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&8&6&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&0&10&-30\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+4y\qquad=11\\3y+z=3\\10z=-30\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=-3\end{array}\right.$$

e) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\1&-1&2&2\\1&2&1&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&1&3&3\\0&4&2&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&1&3&3\\0&0&-10&-8\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2y-z=-1\\y+3z=3\\-10z=-8\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=\dfrac{3}{5}\\z=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{12 - 9\lambda}{5} \\ y = \dfrac{1 - 17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array}\right.$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3y + 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{123}{23} \\ y = \dfrac{107}{23} \\ z = -\dfrac{21}{23} \end{array}\right.$

022 **Discuteix els sistemes d'equacions següents.**

a) $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 4 \\ -x + 3y + 4z = 6 \\ -2x + 11y + 19z = 28 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 3a + b - c = 2 \\ -2a + 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2(b - c) = 9 - c \\ -a + 5(b - 2) = b - 4 \\ 2(7b - c) = 5 - c \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinat

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinat

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 11 & 19 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 11 & 19 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat

f) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

g) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinat

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminat

j) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - c = 9 \\ -a + 4b \qquad = 6 \\ 14b - c = 5 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 27 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

023 Troba totes les solucions del sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=-1\\2x-y+z=0\\-2x+7y+z=-4\end{array}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&1&-1\\2&-1&1&0\\-2&7&1&-4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&1&-1\\0&-3&-1&2\\0&9&3&-6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&1&-1\\0&-3&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=-1\\-3y-z=2\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\y=\lambda\\z=-2-3\lambda\end{array}\right.\qquad\text{amb }\lambda\in\mathbb{R}$$

024 Discuteix pel mètode de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=2\\-x+3y+z=0\\-x+y+z=1\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&1&2\\-1&3&1&0\\-1&1&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&1&2\\0&5&2&2\\0&3&2&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&1&2\\0&5&2&2\\0&0&4&9\end{array}\right)\rightarrow\text{Sistema compatible determinat}$$

025 Resol i classifica el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=1+z\\2x+z=2+y\\y=z\end{array}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=1\\2x-y+z=2\\y-z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-1&1\\2&-1&1&2\\0&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-1&1\\0&-3&3&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-1&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=1\\-3y+3z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=\lambda\\z=\lambda\end{array}\right.\qquad\text{amb }\lambda\in\mathbb{R}$$

026 Resol el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\x-y+z=1\\x+y-z=1\end{array}\right\}$$

Canvia'n només un signe i transforma'l, si és possible, en compatible indeterminat.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \text{Sistema compatible determinat}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -2y \qquad &= 0 \\ -2z &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \text{Sistema compatible indeterminat}$$

027 **Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (x \quad m)$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$.**

a) Si $(A \cdot B)(2C - D) = E$, planteja un sistema de dues equacions i dues incògnites (representades per x, y) en funció de m.

b) Per a quins valors de m el sistema té solució? Quan és única? Resol el sistema si $m = 4$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $(AB)(2C - D) = E \to \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x \quad m)\right] \cdot \left[2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x + 3m \\ x + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3m &= -y + 2m + 2 \\ x + m &= -2x - my + 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + y &= -m + 2 \\ 3x + my &= -m + 5 \end{aligned}\right\}$$

b) Resolem per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & -m + 2 \\ 3 & m & | & -m + 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & -m + 2 \\ 0 & -m + 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, si $m = 1 \to$ rang $(A) = 1$ i rang $(A^*) = 2$, i el sistema serà incompatible, per tant per a valors $m \neq 1$ el sistema tindrà solució:

$$\text{Si } m = 4 \to \left.\begin{aligned} 3x + y &= -2 \\ 3x + 4y &= 1 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

028 Escriu mitjançant equacions aquests sistemes.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = 4 \\ a + 5b = 2 \\ -6a + 7b = 5 \end{array}\right\}$

029 Escriu en forma matricial aquests sistemes d'equacions lineals.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -2 \\ -x - y + 2z = 3 \\ 3y - 5z = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t - v = -1 \\ 2x - 3z + 6v = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} p + q + r - s = 3 \\ 2p - q + 2s = 5 \\ q + 3r - 5s = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ -x + z = -7 \\ 2x + y + 4z = 5 \\ 3y - 9z = -1 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

030 Considera $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriu dels seus termes independents.

a) Escriu les tres equacions que formen el sistema.

b) Troba totes les solucions del sistema.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - 2\lambda \end{array}\right.$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$

031 Escriu aquests sistemes en forma matricial i troba'n la solució a partir de la matriu inversa.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - y = 18 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - z = -7 \\ 2x + y - 3z = -26 \\ 4y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$

032 Considera el sistema:

$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{array}\right\}$

expressa'l matricialment, $AX = B$, calcula la matriu inversa de A i troba'n la solució.

(Activitat de Selectivitat)

Definim: $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$AX=B\rightarrow X=A^{-1}B$$

$$|A|=-1\neq 0\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}$$

033 Considera l'equació matricial següent:

$$\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}$$

Troba de manera raonada els valors de x, y, z.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix}3x-2y\\-2x+y\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4x-2y\\-2x+2y\\y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}4x-2y\quad=-10\\-2x+2y\quad=6\\y+z=3\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\\z=2\end{cases}$$

034 Discuteix els sistemes d'equacions lineals utilitzant el teorema de Rouché-Frobenius:

a) $\left.\begin{array}{r}x+3y-5z=-8\\3x+6y-5z=0\\4x+9y-10z=-8\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}8x-6y+2z=-1\\3x+y-z=10\\-x+3y-2z=5\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}3a+2b-6c+3d=7\\a-b+2c-d=6\\7a+b-6c+3d=32\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}3a+2b-6c+3d=7\\a-b+2c-d=6\\6a-b\qquad\qquad=3\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}2(x+y)-3y+5=0\\3=x-2(x+2y)\\3(x+y+2)+2=0\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}a+5b\qquad=7\\-2a+2b+3c=-2\\-a+3b+2c=1\\4b+c=4\end{array}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -10 & 24 \\ 0 & 3 & -10 & -24 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -10 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 2 \to$ sistema compatible indeterminat

b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + 8F_3 \to F_3]{3F_1 - 8F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -26 & 14 & -82 \\ 0 & 18 & -14 & 39 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -26 & 14 & -82 \\ 0 & -8 & 0 & -43 \end{array}\right)$$

Per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 3 \to$ sistema compatible determinat

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -6 & 3 & 32 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -6 & 3 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow[7F_1 - 3F_3 \to F_3]{F_1 - 3F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 11 & -26 & 12 & -47 \end{array}\right)$$

Ja es veu que la 3a fila no és múltiple de la 2a, per tant:
rang (A) = rang $(A^*) = 3 <$ nre. d'incògnites $\to$ sistema compatible indeterminat

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 - F_3 \to F_3]{F_1 - 3F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & 11 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Per tant, rang $(A) = 2$ i rang $(A^*) = 3 \to$ sistema incompatible

e) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -5 \\ x + 4y &= -3 \\ 3x + 3y &= -8 \end{aligned}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -8 \end{array}\right)$

Ordenem el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -5 \\ -x - 4y = 3 \\ 3x + 3y = -8 \end{array}\right\}$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_1 + 2F_3 \to F_3]{F_1 + 2F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 2$ = nre. d'incògnites $\longrightarrow$ sistema compatible determinat

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3 \to F_3]{2F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 + 3F_4 \to F_4]{2F_2 + 3F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant, rang $(A) = 2$ = rang $(A^*) = 2 <$ nre. d'incògnites $\longrightarrow$ sistema compatible indeterminat

035 Resol, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, aquests sistemes compatibles indeterminats.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z = 1 \\ y - z + t = 1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 0 \\ 11a - b - 3c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3p - 3q + 11r = 0 \\ 4p + 7r = 0 \\ 5p + 3q + 3r = 0 \\ -6p - 6q + r = 0 \end{array}\right\}$

a) Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 - z \\ -3x + y = -3 + 2z \end{array}\right\} \xrightarrow{3Eq_1 + Eq_2 \to Eq_2} \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 - z \\ 7y = 15 - z \end{array}\right\}$$

D'on obtenim la solució:

$$z = \lambda \qquad y = \frac{15 - \lambda}{7} \qquad x = \frac{12 - 5\lambda}{7} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\} \xrightarrow{3Eq_1 + 2Eq_2 \to Eq_2} \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 6 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{3 + \lambda}{2} \\ y = \lambda \end{cases}$

c) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 7 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

que ens dóna un sistema compatible indeterminat: $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 - z \\ 7y = 15 - z \end{array}\right\}$, d'on obtenim la solució:

$$z = \lambda \qquad y = \frac{15 - \lambda}{7} \qquad x = \frac{12 - 5\lambda}{7} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

d) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 - t \\ 2y = 3 - t \\ 2z = 1 + t \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = \dfrac{3 - \lambda}{2} \\ z = \dfrac{3 - \lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

e) Es traca d'un sistema homogeni. Apliquem Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 2F_3 \to F_3]{11F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ -9y = -6z \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{3} \\ y = \dfrac{2\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

f) Es tracta d'un sistema homogeni. Apliquem Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{5F_1 - 3F_3 \to F_3 \\ 2F_1 + F_4 \to F_4}]{4F_1 - 3F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 0 & -12 & 23 \\ 0 & -24 & 46 \\ 0 & -12 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 + F_4 \to F_4]{2F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 0 & -12 & 23 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{array}{r} 3p - 3q = -11r \\ -12q = -23r \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{7\lambda}{4} \\ q = \dfrac{23\lambda}{12} \\ r = \lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

036 Discuteix i resol aquests sistemes d'equacions lineals:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ x+y-3z=3 \\ 2x+3y+z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2y+3z=2 \\ 3x+y+3z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 16x+17y+7z=0 \\ 4x-y+4z=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b+c=5 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b-2c=5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+t=0 \\ x+2y-z+4t=-1 \\ 3x-4y+z-2t=1 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2a-b+c=7 \\ 3a+2b-2c=1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2x-4y+z=7 \\ -3x+6y-2z=4 \\ 11x-22y+6z=24 \end{array}\right\}$

a) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1-F_3\to F_3]{F_1-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

que ens dóna el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ y+4z=0 \\ 3z=-3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=4 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

b) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$; per tant, es tracta d'un sistema indeterminat, que ens dóna el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ 2y=2-3z \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4-\lambda}{2} \\ y=\dfrac{2-3\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda\in\mathbb{R}$$

c) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{16F_1-5F_3\to F_3 \\ 4F_1+5F_4\to F_4}]{2F_1-5F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -21 & -3 & 0 \\ 0 & 21 & -12 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_2+F_4\to F_4]{3F_2-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -5 \end{array}\right);$$

per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 3$ i el sistema és compatible determinat.

Un sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z = 0 \\ -7y-z = 0 \\ -15z = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{21} \\ y = -\dfrac{1}{21} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

d) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{array}\right);$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat. Un sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} a+c = 0 \\ b-c = 1 \\ -3b = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \\ c = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

e) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right);$$

per tant, rang (A) =2 i rang (A^*) = 3, i es tracta d'un sistema incompatible.

f) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2]{F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 7 & -2 \end{array}\right);$$

per tant, rang (A) = rang (A^*) = 2 < nre. d'incògnites = 4, i es tracta d'un sistema compatible indeterminat. Un sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y = -t \\ -5y = 2-2z+7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+\lambda-6\mu}{5} \\ y = \dfrac{-2+2\lambda-7\mu}{5} \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \text{amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

g) Es tracta d'un sistema indeterminat. Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{r} 2a-b = 7-c \\ 3a+2b = 1+2c \end{array}\right\} \xrightarrow{3Eq_1 - Eq_2 \rightarrow Eq_2} \left.\begin{array}{r} 2a-b = 7-c \\ 7b = 19-7c \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{15}{7} \\ b = \dfrac{7c-19}{7} \\ c = \lambda \end{cases}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$

h) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[11F_1+2F_3 \to F_3]{3F_1+2F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 29 \\ 0 & 0 & -1 & 29 \end{array}\right);$$

per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 2 <$ nre. d'incògnites. Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 4y + z = 7 \\ -z = 29 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 18 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -29 \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

037 **Considera les equacions:** $3x + 2y - z = 5 \qquad x + y + z = 3$

Afegeix una equació lineal de manera que el sistema que en resulti sigui:

i) Compatible determinat. Troba'n la solució.

ii) Compatible indeterminat. Troba'n la solució.

iii) Incompatible. Justifica-ho.

(Activitat de Selectivitat)

i) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 2x \qquad = 4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y \qquad = 8 \\ 2x \qquad = 4 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

ii) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 4x + 3y \qquad = 8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y \qquad = 8 \\ 4x + 3y \qquad = 8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y \qquad = 8 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

iii) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 0 = 4 \end{array}\right\} \to \text{Sistema incompatible}$$

038 **Classifica i resol el sistema format per les tres equacions següents:**

$x - 3y + 2z = 0 \qquad -2x + y - z = 0 \qquad x - 8y - z = 0$

(Activitat de Selectivitat)

Com que és un sistema homogeni:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3 \to F_3]{2F_1+F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

El rang $(A) = 3$, o sigui, és un sistema compatible determinat, i la solució és la trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

039 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcula dos nombres reals x i y de manera que es verifiqui que $A + xA + yI = 0$, en què I és la matriu unitat d'ordre 2 i 0 és la matriu nul·la d'ordre 2.

(Activitat de Selectivitat)

$$A + xA + yI = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2x + y & 1 + x \\ 2 + 2x & 3 + 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2 + 2x + y = 0 \\ 1 + x = 0 \\ 2 + 2x = 0 \\ 3 + 3x + y = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x + y = -2 \\ x = -1 \\ 3x + y = -3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

040 L'administrador de la comunitat de veïns vol saber què cobra a l'hora un electricista, un lampista i un paleta. Sap que:

- Al 4t A, l'electricista hi va estar 1 hora i el paleta 2 hores, i van haver de pagar 78 € de mà d'obra.
- Al 3r D, van pagar 85 € per les 2 hores que hi va ser el lampista i l'hora que hi va ser el paleta.
- A casa meva hi va ser 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens van cobrar 133 €.

Quant cobra per hora cada professional?

Considerem x, y, z els preus per hora de feina de l'electricista, del lampista i del paleta, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 78 \\ 2y + z = 85 \\ x + y + 3z = 133 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ x + 2z = 78 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ -y - z = -55 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ y = 30 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 28 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}\right.$$

L'electricista cobra 28 €, el lampista, 30 €, i el paleta, 25 €.

041 Als astronautes de la nau *Enterprise*, se'ls preparen dosis amb dos tipus de complements. Cada gram del complement A conté 2 unitats de riboflavina, 3 de ferro i 2 de carbohidrats. Cada gram del complement B conté 2 unitats de riboflavina, 1 de ferro i 4 de carbohidrats. Quants grams de cada complement són necessaris per produir exactament una dosi amb 12 unitats de riboflavina, 16 de ferro i 14 de carbohidrats?

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x i y els grams de cada tipus de complement.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=12 \\ 3x+y=16 \\ 2x+4y=14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y=12 \\ 3x+y=16 \\ 2y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Són necessaris 5 grams del complement A i 1 gram del complement B.

042 **Un grup de 20 persones, entre homes, dones i nens, es troba per anar d'excursió. Si comptem els homes i les dones junts, resulta que n'hi ha el triple que de nens. A més, si hi anés una dona més, el nombre de dones seria igual al nombre d'homes.**

a) Planteja un sistema per esbrinar quants homes, dones i nens van d'excursió.

b) Resol el problema.

(Activitat de Selectivitat)

a) Considerem x, y, z els homes, les dones i els nens que s'han trobat, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ -4z=-20 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=15 \\ z=5 \\ x-y=1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ z=5 \\ 2y=14 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \\ z=5 \end{array}\right.$$

043 **Una ovella, una cabra i un vedell valen, junts, 870 €. Pel preu d'un vedell, podem comprar 4 ovelles. A més, sabem que 5 ovelles i una cabra valen 620 €. Calcula el preu de cada animal i explica'n els resultats.**

Considerem x, y, z els preus d'una ovella, d'una cabra i d'un vedell, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=870 \\ z=4x \\ 5x+y=620 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=870 \\ 4x-z=0 \\ 5x+y=620 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=870 \\ 5x+y=870 \\ 5x+y=620 \end{array}\right\}$$

El sistema és incompatible. Amb aquestes dades, no podem calcular els preus dels animals.

044 Tres treballadors, *A*, *B* i *C*, a final d'un mes, presenten a l'empresa una plantilla de seguiment, corresponent a les hores de feina, dietes de manutenció i quilòmetres de desplaçament que han fet cadascun d'ells.

	Hores de feina	Dietes	Quilòmetres
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Si saps que l'empresa paga el mateix a cada treballador: *x* euros per hora treballada, *y* euros per cada dieta i *z* euros per quilòmetre de desplaçament i que aquest mes ha pagat un total de 924 € al treballador *A*, 1.390 € al *B* i 646 € al *C*, calcula *x*, *y*, *z*.

(Activitat de Selectivitat)

$$\left.\begin{array}{r}40x + 10y + 150z = 924\\ 60x + 15y + 250z = 1.390\\ 30x + \ \ 6y + 100z = 646\end{array}\right\}$$

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r}40 & 10 & 150 & 924\\ 60 & 15 & 250 & 1390\\ 30 & 6 & 100 & 646\end{array}\right) \xrightarrow[3F_1 + 4F_3 \to F_3]{-3F_1 + 2F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r}40 & 10 & 150 & 924\\ 0 & 0 & 50 & 8\\ 0 & 6 & 50 & 188\end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrr|r}40 & 10 & 150 & 924\\ 0 & 0 & 50 & 8\\ 0 & 6 & 0 & 180\end{array}\right)$$

Que ens dóna el sistema associat següent:

$$\left.\begin{array}{r}40x + 10y + 150 = \ 924\\ 50z = 8\\ 6y = \ 180\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}x = 15\\ y = 30\\ z = 0{,}16\end{array}\right.$$

045 La Pilar compra 200 accions de l'empresa *A*, 150 de *B* i 100 de *C*, i en paga 3.300 €, mentre que en Joan es gasta 3.750 € per la compra de 50 accions de *A*, 120 de *B* i 240 de *C*. Amb aquestes dades, és possible saber el preu de cada acció? I si et diem que cada acció té un preu enter comprès entre 1 € i 12 €, tots dos inclosos?

Considerem *x*, *y*, *z* els preus de les accions de les empreses *A*, *B* i *C*, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r}200x + 150y + 100z = 3.300\\ 50x + 120y + 240z = 3.750\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}200 & 150 & 100 & 3300\\ 50 & 120 & 240 & 3750\end{array}\right) \xrightarrow{-F_1 + 4F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrr|r}200 & 150 & 100 & 3300\\ 0 & 330 & 860 & 11700\end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema indeterminat:

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 150y = 3300 - 100z \\ 860y = 11700 - 860z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{16\lambda - 111}{11} \\ y = \dfrac{1170 - 86\lambda}{33} \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

Amb aquestes dades, no és possible determinar els preus de les accions.

Si les accions tenen un preu enter, el valor de l'acció de l'empresa *C* només pot ser de 9 €; així, les accions de l'empresa *A* valen 3 € i les de *B* valen 12 €.

046 **En Max ven roba en una botiga. A més d'un sou fix, cobra una comissió d'1 € per cada camisa venuda; 1,50 € per cada pantaló i 2 € per cada jaqueta. Ahir, com que va vendre el doble de pantalons de que jaquetes i 5 pantalons més que camises, va guanyar 40,50 €. Quantes peces va vendre?**

Considerem *x*, *y*, *z* els preus d'una camisa, uns pantalons i una jaqueta, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2z \\ y = x + 5 \\ x + 1{,}5y + 2z = 40{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y - 2z = 0 \\ x - y \quad = -5 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y - 2z = 0 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 70z = 455 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 13 \\ z = 6{,}5 \end{array}\right.$$

La solució no té sentit, perquè no es poden vendre 6,5 jaquetes.

047 **Tenim el triple de peres que de taronges. Si decidim donar 5 taronges a cada un dels nois d'un grup, ens sobraran només 21 peres. Quantes taronges i peres tenim? Quants nois hi ha al grup?**

(Activitat de Selectivitat)

Considerem *x* el nombre de peres, *y* el de taronges i *z* el de nois que hi ha al grup.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ y = 5z \\ x = 8z + 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y \quad = 0 \\ y - 5z = 0 \\ x \quad - 8z = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y \quad = 0 \\ y - 5z = 0 \\ 3y - 8z = 21 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y \quad = 0 \\ y - 5z = 0 \\ 7z = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 45 \\ y = 15 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Tenim 45 peres i 15 taronges. Al grup hi ha 3 nois.

048 Una immobiliària ha venut un total de 65 places de garatge en tres urbanitzacions diferents. Els guanys obtinguts per la venda d'una plaça de garatge a la urbanització *A* són de 2.000 €, 4.000 € per una a la urbanització *B* i 6.000 € per una a la urbanització *C*. Sabem que ha venut un 50% més de places a la urbanització *A* que a la urbanització *C*. Calcula el nombre de places de garatge venudes a cada urbanització si saps que el guany obtingut per les venudes a la urbanització *C* és igual a la suma dels beneficis obtinguts per les venudes a les urbanitzacions *A* i *B*.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de places de garatge venudes a cada urbanització, respectivament.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x \qquad\quad = 1{,}5z \\ \quad 6.000z = 2.000x + 4.000y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl} x+\ y+\ z= & 65 \\ 2x \qquad - 3z = & 0 \\ x+2y-3z= & 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl} x+\ y+\ z= & 65 \\ 2y+5z= & 130 \\ y-4z= & -65 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{rl} x+\ y+\ z= & 65 \\ 2y+\ 5z= & 130 \\ 13z= & 260 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=15 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Han venut 30 places de garatge a la urbanització *A*, 15 a la *B* i 20 a la *C*.

049 La Mònica i l'Eva parlen per telèfon per comprovar si els sistemes que han resolt els donen els mateixos resultats. Només hi ha un resultat diferent.

La Mònica diu que les solucions del sistema són $x=\frac{\lambda+8}{7}$, $y=\frac{11\lambda+18}{7}$, $z=\lambda$, mentre que l'Eva diu que són $x=\frac{\mu+10}{11}$, $y=\mu$, $z=\frac{7\mu-18}{11}$. Després d'assegurar-se que totes dues han escrit l'enunciat del problema de la mateixa manera, comencen a pensar que potser es tracta de dues maneres de resoldre el mateix sistema d'equacions. Decideix-ho tu.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda+8}{7} \\ y=\dfrac{11\lambda+18}{7} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 7x=z+8 \\ 7y=11z+18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\mu+10}{11} \\ y=\mu \\ z=\dfrac{7\mu-18}{11} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 11x=y+10 \\ 11z=7y-18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 11x-y=10 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

Si formem un sistema amb les tres equacions:

$$\left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \\ 11x-y=10 \end{array}\right\}$$

comprovem que les dues solucions són correctes.

050 L'encarregat d'un magatzem d'electrodomèstics vol saber quant pesen una nevera i una rentadora. Com que no té bàscula, demana algunes informacions a altres treballadors:

- Sr. Castany: Una nevera i una rentadora juntes pesen 120 kg.
- Sr. Arçot: L'altre dia vaig portar amb la furgoneta 3 neveres i 4 rentadores. La furgoneta buida pesa 1.250 kg, i amb la càrrega pesava 1.550 kg.
- Sr. Pontons: Jo vaig portar 4 neveres i 5 rentadores, i tot junt pesava 480 kg.

Fes els càlculs per determinar-ne els pesos. Què passa? Busca alguna explicació d'aquests resultats.

Considerem x el pes d'una nevera i y el pes d'una rentadora.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=1.550-1.250 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=300 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\}$$

Intentem resoldre el problema per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_1-F_3\to F_3]{3F_1-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 0 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 60 \end{array}\right)$$

Per tant, rang $(A) = 2$ i rang $(A^*) = 3$, o sigui, el sistema és incompatible i les dades recollides no poden ser correctes.

051 Planteja, sense resoldre'l, el sistema d'equacions que permeti trobar la solució del problema següent:

«En un examen de Matemàtiques que constava de tres problemes, un alumne va obtenir una qualificació total de 7,2. La puntuació del primer problema va ser un 40% més que la del segon, i la del tercer va ser el doble de la suma de les puntuacions del primer i el segon. Quina va ser la puntuació de cada problema?».

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el valor de les puntuacions de cadascun dels tres problemes.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=7{,}2 \\ x=1{,}4y \\ z=2(x+y) \end{array}\right\}$$

052 La Júlia, la Clara i en Miquel reparteixen fulls de propaganda. La Clara sempre en reparteix el 20% del total, en Miquel reparteix 100 fulls més la Júlia i entre la Clara i la Júlia en reparteixen 850 fulls.

Planteja un sistema d'equacions que permeti saber quants fulls reparteix cadascun. Si saps que l'empresa paga 1 cèntim per cada full repartit, calcula els diners que han cobrat cada un dels tres.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de fulls de propaganda que reparteix cadascú.

$$\left.\begin{array}{r} y = 0{,}2(x+y+z) \\ z = x+100 \\ x+y = 850 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ x \qquad\quad - z = -100 \\ x + \ \ y \qquad = 850 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ 2x - 4y \qquad = -100 \\ x + \ \ y \qquad = 850 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ 2x - 4y \qquad = -100 \\ 6x \qquad\qquad = 3.300 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 550 \\ y = 300 \\ z = 650 \end{array}\right.$$

La Júlia reparteix 550 fulls; per tant, ha cobrat 550 cènt. = 5,50 €.
La Clara reparteix 300 fulls i cobra 300 cènt. = 3 €.
En Miquel reparteix 650 fulls, per això cobra 650 cènt. = 6,50 €.

053 **Una empresa ha invertit 73.000 € en la compra d'ordinadors portàtils de tres classes, *A*, *B* i *C*, els costos per unitat dels quals són de 2.400 €, 1.200 € i 1.000 €, respectivament. Si saps que, en total, ha comprat 55 ordinadors i que la quantitat invertida en els de tipus *A* ha estat la mateixa que la invertida en els de tipus *B*, esbrina quants aparells ha comprat de cada classe.**

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre d'ordinadors de cada tipus que ha comprat.

$$\left.\begin{array}{l} 2.400x + 1.200y + 1.000z = 73.000 \\ \qquad x + \qquad y + \qquad z = 55 \\ 2.400x \qquad\qquad\qquad = 1.200y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ \ \ x + \ \ y + \ \ z = 55 \\ 2x - \ \ y \qquad = 0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ 7x + \ \ y \qquad = 90 \\ 2x - \ \ y \qquad = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ 7x + \ \ y \qquad = 90 \\ 9x \qquad\qquad = 90 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 25 \end{array}\right.$$

L'empresa ha comprat 10 ordinadors de classe *A*, 20 de classe *B* i 25 de classe *C*.

054 **El caixer d'un banc només diposa de bitllets de 10, 20 i 50 €. Hem tret 290 € del banc i el caixer ens ha donat exactament 8 bitllets. El nombre de bitllets de 10 € que ens ha donat és el doble del de 20 €.**

Planteja i resol el sistema d'equacions lineals associat a aquest problema per obtenir el nombre de bitllets de cada tipus que ens ha donat el caixer.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de bitllets de 10, 20 i 50 €, respectivament.

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y + 50z = 290 \\ \ \ x + \ \ \ y + \ \ \ z = 8 \\ \ \ x \qquad\qquad\quad = 2y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 29 \\ x + \ \ y + \ \ z = 8 \\ x - 2y \qquad = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 29 \\ 4x + 3y \qquad = 11 \\ x - 2y \qquad = 0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 29 \\ 4x + 3y \qquad = 11 \\ 11x \qquad\qquad = 22 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

El caixer ens ha donat 2 bitllets de 10 €, 1 bitllet de 20 € i 5 bitllets de 50 €.

055 Una persona fa fotografies amb una càmera digital. Sap que cada fotografia de qualitat normal sempre ocupa 0,2 megabytes de memòria. Cada fotografia de qualitat òptima sempre ocupa una quantitat *A* de megabytes, però desconeix aquesta quantitat. Aquesta setmana ha portat a imprimir 24 fotografies, que li han ocupat un total de 9,2 megabytes de memòria.

a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de *A*) en què les incògnites siguin el nombre de fotos de cada classe que ha fet. Estudia la compatibilitat del sistema.

b) Hi ha alguna quantitat de megabytes que és impossible que ocupi una foto de qualitat òptima?

c) La setmana passada també va fer 24 còpies, que li van ocupar 9,2 megabytes de memòria en total. És possible que el nombre de fotos de cada tipus fos diferent al d'aquesta setmana?

(Activitat de Selectivitat)

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0,2 & A & 9,2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+5F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0 & 5A-1 & 22 \end{array}\right)$

$5A - 1 = 0 \to A = 0,2$

Per tant, si $A = 0,2$ el sistema és incompatible, i si $A \neq 0,2$ el sistema serà incompatible determinat.

b) Pel context del problema, no pot ser una quantitat negativa, i perquè hi hagi solució ha de ser diferent de 0,2.

c) Com que és un sistema compatible determinat, excepte per a $A = 0,2$, el nombre de fotografies de cada tipus per a un valor de *A* és únic, per això no podria ser un altre nombre de fotos.

056 Un museu té tres sales d'exposicions: *A*, *B* i *C*. Els preus de les entrades són, respectivament, 2, 4 i 7 €. Un dia determinat, van entrar a les tres sales un total de 210 persones, i la recaptació conjunta va ser igual a la setena part dels visitants de la sala *B*. Determina el nombre de visitants de cada sala i justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem *x*, *y*, *z* el nombre de visitants de cada sala.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 210 \\ 2x + 4y + 7z = \dfrac{y}{7} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 210 \\ 14x + 27y + 49z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema té dues equacions i tres incògnites; per tant, no pot ser compatible determinat. No tenim prou dades per poder determinar els visitants de cada sala.

057 A primera hora del matí, volem que en un caixer automàtic hi hagi 800 bitllets (de 10, 20 i 50 €), amb un valor total de 16.000 €. Si saps que per cada 3 bitllets de 50 € en calen 4 de 20 €, planteja un sistema d'equacions lineals per esbrinar quants bitllets de cada quantitat hi ha d'haver i troba'n la solució mitjançant el mètode de Gauss.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de bitllets de 10, 20 i 50 €, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 16.000 \\ 4z = 3y \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 1.600 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 0 & -16 & -2.400 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ -16z = -2.400 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 450 \\ y = 200 \\ z = 150 \end{array}\right.$$

Hi ha 450 bitllets de 10 €, 200 bitllets de 20 € i 150 bitllets de 50 €.

058 Un tren transporta 70 viatgers i la recaptació de l'import dels bitllets és de 999 €. Calcula quants viatgers han pagat l'import total del bitllet, que val 27 € , quants han pagat el 30% del bitllet i quants el 50%, si saps que el nombre de viatgers que han pagat el 30% és el doble del nombre de viatgers que paguen el bitllet sencer.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de viatgers que n'han pagat l'import total, el 30% del bitllet i el 50% del bitllet, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 70 \\ 27x + 0{,}3 \cdot 27y + 0{,}5 \cdot 27z = 999 \\ y = 2x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 70 \\ 90x + 27y + 45z = 3.330 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 70 \\ 45x - 18y = 180 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 70 \\ 45x - 18y = 180 \\ 9x = 180 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 20 \\ y = 40 \\ z = 10 \end{array}\right.$$

L'import total del bitllet l'han pagat 20 viatgers, 40 viatgers n'han pagat el 30% i 10 viatgers n'han pagat el 50%.

059 Una companyia aèria de baix cost ofereix vols des de Girona fins a tres ciutats, *A*, *B* i *C*. Calcula el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a la ciutat *A*, 15 per a la *B* i cap per a la *C*, ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per a *A*, 8 per a *B* i cap per a *C*, ingressa 760 €; si ven 6 bitllets per a *A*, 5 per a *B* i 8 per a *C*, ingressa 855 €.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x, y i z els preus dels bitllets a les ciutats A, B i C, respectivament, i plantegem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 925 \\ 3x + 8y &= 760 \\ 6x + 5y + 8z &= 855 \end{aligned}\right\}$$

Podem resoldre les dues primeres de manera independent, i obtenim $x = 40$ i $y = 35$.

Substituïm a la tercera i obtenim: $z = 55$.

060 **Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril, de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 €, per haver fet el doble de quilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determina les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.**

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x, y i z les distàncies que hem recorregut en taxi, ferrocarril i autobús, respectivament. Les condicions del problema ens donen el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 200 \\ 5x + 2y + 3z &= 500 \\ y &= 2(x+z) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 200 \\ 5x + 2y + 3z &= 500 \\ -2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 3 & 500 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{5F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 3 & 0 & 400 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right)$$

que ens dóna la solució: $z = 50$ km $\quad y = 133{,}33$ km $\quad x = 16{,}67$ km

061 **Una persona va invertir 6.000 € comprant accions de dues empreses, *A* i *B*. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa *A* ha pujat un 5% i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa *B* ha baixat un 10%. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150 €. Determina quants diners va invertir en accions de cada empresa.**

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x i y els diners invertits en accions de les empreses A i B, respectivament.

Les condicions del problema ens donen el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 6000 \\ 0{,}05x - 0{,}1y &= 150 \end{aligned}\right\}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0{,}05 & -0{,}1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + 20F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0 & 3 & 3000 \end{array}\right)$$

D'on resulta: $y = 1.000$ € $\quad x = 5.000$ €

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitat de Selectivitat)

1 En una fàbrica d'articles esportius tenen 10 caixes de mides diferents, Grans, Mitjanes i Petites, per envasar les samarretes d'atletisme que produeixen i amb capacitat per a 50, 30 i 25 samarretes, respectivament. Si una caixa gran fos mitjana, aleshores hi hauria el mateix nombre de caixes grans i mitjanes. En total, envasen 390 samarretes. Determina el nombre de caixes que hi ha de cada classe.

Considerem x, y, z el nombre de caixes per a samarretes grans, mitjanes i petites, respectivament.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 50x+30y+25z=390 \\ x-1=y+1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 10x+6y+5z=78 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 5x+y=28 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 5x+y=28 \\ 6x=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Hi ha 5 caixes de samarretes grans, 3 de mitjanes i 2 de petites.

2 **Discuteix, en funció del paràmetre a, la solució del sistema d'equacions lineals següents. Troba'n la solució quan sigui possible.**

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=2 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y+az=-a \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -a \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1-F_3\rightarrow F_3]{3F_1-F_2\rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & 5 \\ 0 & 13 & 2-a & 4+a \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3\rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -13 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right)$$

Per tant:

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema compatible determinat. El sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=2 \\ 13y+z=5 \\ (a-1)z=-(a-1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{15}{13} \\ y=\dfrac{6}{13} \\ z=-1 \end{array}\right.$$

- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
  El sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 - z \\ 13y = 5 - z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6 - 9\lambda}{13} \\ y = \dfrac{5 - \lambda}{13} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

3 **Considera el sistema d'equacions següent:**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Troba els valors de *a* per als quals el sistema no és compatible determinat.

b) Troba el valor de *a* per al qual $x = 2$. Determina també els valors de *y* i de *z* en aquest cas.

a) Canviem l'ordre de les incògnites i apliquem Gauss:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & a & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[-4F_1 + F_3 \rightarrow F_3]{-F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & a - 4 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a - 7 & -12 \end{array}\right)$$

- Si $a = 7 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq 7 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

b) El sistema equivalent i la solució són:

$$\left.\begin{array}{r} z + y + x = 5 \\ 2y + x = -2 \\ (a - 7)x = -12 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} z \\ y \\ x = \dfrac{-12}{a - 7} \end{cases} \qquad \text{Si } x = 2 \rightarrow \frac{-12}{a - 7} = -2 \rightarrow a = 1$$

i aleshores: $2y = -2 - 2 \rightarrow y = -2$ i $z = 5 - (-2) - 2 = 5$

4 **Discuteix i resol el sistema següent per a tots els valors del paràmetre *a*. (Empra el mètode de Gauss per a la resolució).**

$$\left.\begin{array}{r} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a + 2)z = 6 - a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - 4F_3 \to F_3]{F_1 - 4F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & a-4 & -8a-10 & 4a-25 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 12a+8 & -4a+28 \end{array}\right)$$

a) Si $12a + 8 = 0 \rightarrow a = \frac{-2}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i rang $(A^*) = 3 \rightarrow$ incompatible.

b) Si $a \neq \frac{-2}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, i el sistema serà compatible.

Un sistema equivalent és:

$$\left.\begin{aligned} 4x + ay - 2z &= -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z &= 3 \\ (12a+8)z &= -4a+28 \end{aligned}\right\} \rightarrow z = \frac{-4a+28}{12a+8} \text{ i amb aquest valor}$$

passem a la segona equació:

$$(a-4)y + (4a-2)\cdot\frac{(-4a+33)}{(12a+8)} = 3 \rightarrow y = 3 - \frac{(4a-2)(-4a+28)}{(a-4)(12a+8)},$$

per tant, tampoc és vàlid el valor $a = 4$. Aleshores:

b1) Si $a = 4$, la matriu és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 56 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2 - F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ és a dir}$$

$a = 4 \rightarrow$ rang $(A) =$ rang $(A^*) = 2 \rightarrow$ sistema compatible indeterminat:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y - 2z &= -1 \\ 14z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1+7\lambda}{7} \\ y = \lambda \\ z = \dfrac{3}{14} \end{cases} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

b2) I si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$, el sistema és compatible determinat: el sistema equivalent

$$\left.\begin{aligned} 4x + ay - 2z &= -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z &= 3 \\ (12a+8)z &= -4a+28 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3-a^2}{3a+2} \\ y = \dfrac{4a-5}{3a+2} \\ z = \dfrac{-4a+28}{12a+8} = \dfrac{7-a}{3a+2} \end{cases}$$

5 **El sistema de quatre equacions amb quatre incògnites:**

$$5x + 3y = 1$$
$$5u + 3v = 2$$
$$3x + 2y = -1$$
$$3u + 2v = 3$$

es pot expressar en la foma $AX = B$, en què A, X i B són matrius quadrades 2×2. Troba aquesta expressió i resol matricialment el sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Calculem A^{-1} pel mètode Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1 - 5F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2 + F_1 \rightarrow F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \cdot (-1) \rightarrow F_2]{F_{1/5} \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

I a partir d'aquí:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

6 **Resol el sistema següent:**

$$x + y + z = -1$$
$$-3x + y - z = 7$$
$$2x - 3y + z = -12$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 - F_3 \rightarrow F_3]{3F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_2 - 4F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -20 \end{array}\right)$$

que ens dóna el sistema equivalent i la solució:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ 4y + 2z = 4 \\ 6z = -20 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

7 Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2.000 €, un interès anual del 2%, 3% i k% (que no coneixem).

La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B, obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C, obtindrien 218 €.

a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Sense resoldre el sistema, determina la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.

c) Troba, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resol el sistema per a aquest valor de k, i dóna'n tres solucions diferents.

a) Si anomenem x, y i z els diners de la Joana, en Manel i en Dani, respectivament, podem plantejar el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}02(x+y+z) &= 164 \\ 0{,}02x + \frac{k}{100}y + 0{,}03z &= 192 \\ 0{,}03x + 0{,}03y + \frac{k}{100}z &= 218 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 8.200 \\ 2x+ky+3z &= 19.200 \\ 3x+3y+kz &= 21.800 \end{aligned}\right\}$$

b) Del sistema, la primera equació ens dóna directament aquesta quantitat: 8.200 €.

c) Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 2 & k & 3 & 19.200 \\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & k-2 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & k-3 & -2.800 \end{array}\right)$$

Tenim que:

- Si $k=3 \rightarrow$ rang $(A)=2$ i rang $(A^*)=3 \rightarrow$ sistema incompatible
- Si $k=2$, obtenim la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per tant, rang $(A)=$ rang $(A^*)=2$, i el sistema serà indeterminat, o sigui, amb infinites solucions.

El sistema i la solució general són:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 8.200 \\ z &= 2.800 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 5.400-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2.800 \end{cases}$$

I algunes solucions són les següents (fixeu-vos que han de ser més grans de 2.000):

x	2.400	2.900	3.400
y	3.000	2.500	2.000
z	2.800	2.800	2.800