Matrius

1

ACTIVITATS

1. Pàgina 10

La matriu consta de dues files, que corresponen als alumnes, i quatre columnes amb les qualificacions. Així:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Pàgina 10

La matriu solució és: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Pàgina 10

La matriu solució és: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Pàgina 11

Com que les dues matrius tenen la mateixa dimensió, els elements de cada una han de ser iguals; és a dir:

$$\begin{cases} a+1=3 \\ 2a+1=b+1 \\ 2=d-1 \\ c-2=2c \\ 3-a=1 \\ 6=b+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=-2 \\ d=3 \end{cases}$$

Així doncs, les dues matrius són: $A=B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

5. Pàgina 11

La matriu solució és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Pàgina 12

La matriu solució és: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriu triangular superior

7. Pàgina 12

La resposta és oberta, amb la condició que els elements de la diagonal principal sumin 7 i la resta d'elements sigui 0. Per exemple:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Pàgina 12

La resposta és oberta, amb la condició que els elements de la diagonal principal siguin 0 i els altres no.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 11 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Pàgina 12

La matriu solució és: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ Matriu triangular inferior

10. Pàgina 13

La matriu solució és: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

11. Pàgina 13

Per fer la comprovació utilitzem la notació $A = a_{ij}$. Així doncs: $A^t = a_{ij}{}^t = a_{ji}{}^t = a_{ij} = A$

La igualtat $a_{ij}{}^t = a_{ji}{}^t$ es verifica mitjançant la propietat commutativa de la suma.

Una matriu que compleixi aquestes condicions pot ser, per exemple: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

12. Pàgina 14

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -10 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -16 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

13. Pàgina 14

La matriu transposada de A és: $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Així doncs:

$$A + A^t - I \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

14. Pàgina 14

En primer lloc, calculem $B + C$. És a dir:

$$B+C=\begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-3 & 9 & c+9 & b+4 \\ 3 & e & a+4 & d+6 \end{pmatrix}$$

Com que tenen les mateixes dimensions, hem d'igualar els elements de la matriu A amb la matriu anterior. És a dir:

$$\begin{cases} a=2a-3 \\ b=9 \\ 7=c+9 \\ 8+d=b+4 \\ a=3 \\ 9=e \\ c+9=a+4 \\ e+2=d+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=9 \\ c=-2 \\ d=5 \\ e=9 \end{cases}$$

15. Pàgina 15

a) $3A-B+2C=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

b) $2C+B-3A=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

16. Pàgina 15

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=-1+4+9=12$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $2A\cdot 3B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}=-6+24+54=72$

d) $-2B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$

17. Pàgina 16

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A^t\cdot B$ no es pot fer, perquè el nombre de columnes de A^t no coincideix amb el nombre de files de B.

18. Pàgina 16

$$A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 52 & -55 & -13 \\ 13 & -20 & 13 \end{pmatrix}$$

19. Pàgina 17

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 21 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ No són commutables.

b) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B+A\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

20. Pàgina 17

Comprarà al proveïdor que surti més econòmic. Per saber-ho, s'ha de calcular el cost total:

El cost comprant al proveïdor *M* puja a: $6,50 \quad 1,50 \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100.000 \\ 550.000 \\ 50.000 \end{pmatrix}=$ 3.175.000 €

El cost comprant al proveïdor *N* puja a: $6,70 \quad 1,10 \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100.000 \\ 550.000 \\ 50.000 \end{pmatrix}=$ 3.150.000 €

Per tant, ha de comprar al proveïdor *N*.

21. Pàgina 18

El rang de la matriu A és 2, ja que no hi ha cap *a*, *b* i *c* que verifiquin que $F_2=a\cdot F_1$, $F_3=b\cdot F_1$ o bé $F_3=c\cdot F_2$ i, tot i això: $F_3=F_1+F_2$

El rang de la matriu B és 2, ja que no hi ha cap *a*, *b* i *c* que verifiquin que $F_2=a\cdot F_1$, $F_3=b\cdot F_1$ o bé $F_3=c\cdot F_2$ i, tot i això: $F_3=2F_1+F_2$

22. Pàgina 18

El rang de *A* és 2, ja que no hi ha cap *a* que verifiqui que: $F_2=a\cdot F_1$

El rang de *B* és 1, ja que: $F_3=3\cdot F_1$ i $F_2=2\cdot F_1$

El rang de $A\cdot B^t$ és 1, ja que $A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}$

i, a més: $F_2=-F_1$

23. Pàgina 19

El rang de la matriu *A* és 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_1+F_3]{F_2=F_2+3F_1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_2-F_3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu *B* és 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+2F_1}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=7F_3+2F_2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

24. Pàgina 19

$$A^t \cdot B - C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix}$$

El rang està en funció del paràmetre m. Pel mètode de Gauss tenim que: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$

Així doncs, si $m = 1$, aleshores el rang de $A^t \cdot B - C^t$ és 1, i si $m \neq 1$, aleshores el rang és 2.

25. Pàgina 20

a) Busquem una matriu B que verifiqui que $A \cdot B = I$ i $B \cdot A = I$. Si $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, tenim que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 3c+d \\ 2a+b & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \to \begin{cases} 3a+b=1 \\ 3c+d=0 \\ 2a+b=0 \\ 2c+d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=3 \end{cases} \to B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que: $B \cdot A = I \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

26. Pàgina 20

Per comprovar si una matriu és invertible, podem calcular el rang de la matriu.

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to$ Com que el rang és 2, determinem que la matriu és invertible.

27. Pàgina 20

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Pàgina 21

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per verificar que hem obtingut la inversa, hem de comprovar que $I = A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Per verificar que hem obtingut la inversa, hem de comprovar que $I = B \cdot B^{-1}$:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Pàgina 21

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

30. Pàgina 22

Si aïllem X a l'equació, tenim que $X = A^{-1} \cdot B$. Per mitjà del procediment de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Així doncs:

$$X = A^{-1} \cdot B \to X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

31. Pàgina 22

Si aïllem X a l'equació, tenim que $X = B \cdot A^{-1}$. Per mitjà del procediment de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Així doncs:

$$X = B \cdot A^{-1} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

32. Pàgina 23

En primer lloc, aïllem X, és a dir: $A^t \cdot X - B = 0 \to A^t \cdot X = B \to X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$

En segon lloc, calculem $\left(A^t\right)^{-1}$:

$$\left(A^t\right)^{-1} \to \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalment, multipliquem i obtenim que:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

33. Pàgina 23

Aïllem *X*, és a dir: $X\cdot A+A=2A^2\rightarrow X\cdot A=2A^2-A\rightarrow X=(2A^2-A)\cdot A^{-1}\rightarrow X=2A-I$

Així doncs:

$$X=2A-I\rightarrow X=2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\-1&-2&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&2\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$$

SABER FER

34. Pàgina 24

$$A^t=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad 2B=\begin{pmatrix}-2&4&0\\2&0&4\\2&-4&0\end{pmatrix}$$

$$(2B-I)^2=\begin{pmatrix}-3&4&0\\2&-1&4\\2&-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&0\\2&-1&4\\2&-4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-16&16\\0&-7&-8\\-16&16&-15\end{pmatrix}$$

$$A^t(2B-I)^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17&-16&16\\0&-7&-8\\-16&16&-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&23&-7\\50&-48&47\\0&-7&-8\end{pmatrix}$$

35. Pàgina 24

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-k&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2k&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\-2k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-k&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3k&1\end{pmatrix}$

Així doncs tenim que $A^{101}=\begin{pmatrix}1&0\\-101k&1\end{pmatrix}$.

b) Si $k=3$, aleshores $A^{101}=\begin{pmatrix}1&0\\-303&1\end{pmatrix}$.

c) Hauria de ser $k=0$.

36. Pàgina 25

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad A-B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

Si sumem les dues equacions obtenim:

$$2A=\begin{pmatrix}2&3\\2&5\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}\\1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Aïllem a la primera equació:

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}\\1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{3}{2}\\-1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

37. Pàgina 25

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-34&70\\0&-21&43\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-34&70\\0&-21&43\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\alpha=7,\ \beta=-6$$

38. Pàgina 26

La matriu resultat és de dimensió 1×3, en què cada element representa el que costen en total tots els productes de cada fàbrica.

$$\begin{pmatrix}25&30&60&75\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}34&40&46\\11&8&12\\23&27&32\\25&21&30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.435&4.435&5.680\end{pmatrix}$$

La primera i la segona fàbrica ofereixen el mateix preu per aquesta comanda.

39. Pàgina 26

Clavells $=(12\quad 4\quad 8)$ Roses $=(10\quad 15\quad 5)$ Tulipes $=(3\quad 6\quad 12)$

Centres de cada tipus $=\begin{pmatrix}87\\27\\53\end{pmatrix}$

Calculem quants centres es necessiten de cada tipus:

Clavells $=\begin{pmatrix}12&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}87\\27\\53\end{pmatrix}=1576$ Roses $=\begin{pmatrix}10&15&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}87\\27\\53\end{pmatrix}=1540$ Tulipes $=\begin{pmatrix}3&6&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}87\\27\\53\end{pmatrix}=1059$

40. Pàgina 27

$$\begin{pmatrix}4&-1&-2&1\\-2&-3&-8&-7\\3&2-a&3&3+a\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=4F_3-3F_1]{F_2=2F_2+F_1}\begin{pmatrix}4&-1&-2&1\\0&-7&-18&-13\\0&11-4a&18&9+4a\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_2+F_3}\begin{pmatrix}4&-1&-2&1\\0&-7&-18&-13\\0&4-4a&0&-4+4a\end{pmatrix}$$

- Si $a=1$, aleshores: Rang $(A)=2$
- Si $a\neq 1$, aleshores: Rang $(A)=3$

41. Pàgina 27

Perquè la matriu sigui invertible, cal que el seu rang sigui màxim (en aquest cas, 3).

$$\begin{pmatrix}k+1&1&1\\0&k-2&1\\0&k-2&-k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}k+1&1&1\\0&k-2&1\\0&0&-k-1\end{pmatrix}$$

Aleshores, per als valors que anul·len la diagonal principal (–1 i 2) la matriu M no té rang 3. Per tant, aquests són els valors per als quals M no té inversa.

42. Pàgina 27

$$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=A^2 \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 18\\12 & 31\end{pmatrix} \\ X-Y=A^{-1}\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Si sumem les dues equacions obtenim:

$$3X=\begin{pmatrix}2 & 21\\14 & 30\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}2/3 & 7\\14/3 & 10\end{pmatrix}$$

Substituïm a la segona equació:

$$Y=\begin{pmatrix}2/3 & 7\\14/3 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17/3 & 4\\8/3 & 11\end{pmatrix}$$

ACTIVITATS

43. Pàgina 28

Resposta oberta. Per exemple:

a) 1 3   4 15 14

b) $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}9\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 6 & 0\\0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 2 & 0\\6 & 5 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0\\0 & 4 & 1 & 0\\1 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$

44. Pàgina 28

La matriu solució és: $\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

45. Pàgina 28

Com que tenen les mateixes dimensions, hem d'igualar els elements de la matriu A amb els de la matriu B:

$$\left\{\begin{array}{l}1=1\\2=2\\x+3=y\\3=3\\x=2y-5\\-4=-4\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=2\end{array}\right.$$

46. **Pàgina 28**

a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 6 & 3 & -2\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

c) $A-2B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\ 8 & 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ -6 & -3 & 7\end{pmatrix}$

d) $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & -3 & 0\\ 12 & 6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -5 & 6\\ 16 & 8 & -7\end{pmatrix}$

47. **Pàgina 28**

a) $n\times m \cdot m\times p \to n\times p$

b) $m\times n \cdot n\times p \to m\times p$

c) $m\times p \cdot p\times n \to m\times n$

d) $p\times n \cdot n\times m \to p\times m$

e) $m\times p \cdot p\times n + m\times n \to m\times n$

f) $p\times m \cdot m\times n - p\times n \to p\times n$

48. **Pàgina 28**

a) 2×4 b) 3×6 c) 3×3 d) 6×3 e) 4×6 f) 4×2

49. **Pàgina 28**

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $B^t\cdot A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

c) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

50. **Pàgina 28**

Per fer la comprovació utilitzarem la notació $A= a_{ij}$. Així doncs: $A^{t\ t}=\left[\, a_{ij}{}^{t}\right]^{t}= a_{ji}{}^{t}= a_{ij} =A$

51. **Pàgina 28**

Per fer la comprovació utilitzarem la notació $A= a_{ij}$. Així doncs: $A^t= a_{ij}{}^{t}= -a_{ji}{}^{t}=- a_{ji}{}^{t}=- a_{ij} =-A$

La igualtat $a_{ij}{}^{t}= -a_{ji}{}^{t}$ es verifica perquè: $i-j=- j-i$

52. Pàgina 28

a) $AB=\begin{pmatrix}2 & -4\\3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\3 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -2 & 26\\-3 & 4 & 11\end{pmatrix}$

c) $BC=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\3 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\2 & 1 & 1\\1 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -16 & -19\\-5 & 16 & 24\end{pmatrix}$

b) No és possible.

d) $CB^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\2 & 1 & 1\\1 & -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 1\\5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & -22\\2 & 3\\-15 & 8\end{pmatrix}$

53. Pàgina 28

a) $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\0 & 3\\5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -4\\7 & -9 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\0 & 3\\5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60 & 14\\76 & -34\end{pmatrix}$

b) $A\cdot C^t+B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -9 & -5\\23 & 3 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -12 & -4\\24 & 3 & 16\end{pmatrix}$

c) $B^t\cdot A-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -1\\0 & 3\\5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\3 & 9\\2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -1\\0 & 3\\5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4\\3 & 6\\-3 & -2\end{pmatrix}$

d) $B\cdot C\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\0 & 3\\5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -11\\13 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-54 & -74\\-16 & -40\end{pmatrix}$

e) $A^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 9 & -5\\-25 & 3 & -15\end{pmatrix}$

f) $B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 3 & 10\\-24 & 0 & -15\\7 & 3 & 5\end{pmatrix}$

54. Pàgina 28

$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -3\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -3\end{pmatrix}$

55. Pàgina 28

Volem trobar les matrius $X=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ que verifiquin que $A\cdot X=X\cdot A$

$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\c & d\end{pmatrix}$

$X\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\c & c+d\end{pmatrix}$

Si igualem cada terme, obtenim que: $\begin{cases}a+c=a\\b+d=a+b\\c=c\\c+d=d\end{cases}\to\begin{cases}a=\alpha\\b=\lambda\\c=0\\d=\alpha\end{cases}\longrightarrow X=\begin{pmatrix}\alpha & \lambda\\0 & \alpha\end{pmatrix}$

56. Pàgina 28

Perquè la matriu *B* commuti amb la matriu *A* és necessari que aquesta matriu sigui quadrada de dimensió 2.

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Com que la matriu *B* ha de ser triangular superior, aleshores $c = 0$. Així doncs: $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b+3d \\ -a & -b+2d \end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -d & 2d \end{pmatrix}$$

Si igualem cada terme, tenim que: $\begin{cases} a=a-b \\ -a=-d \\ b+3d=3a+2b \\ -b+2d=2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\lambda \end{cases}$ Com que $a+d=2\rightarrow\lambda+\lambda=2\rightarrow\lambda=1$

Per tant, la matriu que busquem és: $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. Pàgina 28

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) Considerem $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matriu *X* ha de verificar $A\cdot X=X\cdot A$. Aleshores:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \qquad X\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a-b & 2b \\ 3c-d & 2d \end{pmatrix}$$

Per tant, si igualem cada terme, tenim que:

$$\begin{cases} 3a=3a-b \\ 3b=2b \\ -a+2c=3c-d \\ -b+2d=2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ b=0 \\ c=\alpha-\lambda \\ d=\alpha \end{cases} \rightarrow X=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha-\lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

58. Pàgina 28

Considerem $P=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$:

$$P\cdot C=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa-yb & xb+ay \\ -ya-xb & -yb+xa \end{pmatrix} \qquad C\cdot P=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -bx-ay & -by+ax \end{pmatrix}$$

Així doncs, les matrius *C* i *P* són sempre commutables.

59. Pàgina 28

Considerem $A \in M$ i $B \in M$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -\ ad+bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

D’altra banda:

$$ac-bd\ ^{2} +\ ad+bc\ ^{2} = a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc =$$
$$= a^2\ c^2+d^2\ + b^2\ c^2+d^2\ = a^2+b^2 = 1$$

60. Pàgina 28

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t & -t \\ 2t & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Si igualem els termes, obtenim que: $t = -3$

61. Pàgina 28

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+y^2 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si igualem els termes, obtenim que:

$$\begin{cases} 1+y^2=5 \\ x+yz=0 \\ x^2+z^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1,\ y_1,\ z_1 = 2,\ 2,\ -1 \\ x_2,\ y_2,\ z_2 = -2,\ 2,\ 1 \\ x_3,\ y_3,\ z_3 = 2,\ -2,\ 1 \\ x_4,\ y_4,\ z_4 = -2,\ -2,\ -1 \end{cases}$$

62. Pàgina 28

Si fem les operacions i igualem cada terme, tenim que:

$x^2+3 = 2-2x \to x^2+2x+1 = 0 \to x = -1$

Com a observació, la resta d’equacions no aporten informació sobre la variable *x*.

Per tant, si $x = -1$, es verifica la igualtat que ens demanen.

63. Pàgina 28

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2-1 & 2x & 1-2x \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} \to x = 3$$

Com a observació, la solució $x = -3$ no és vàlida, ja que no es verificaria per al tercer element de la primera fila.

64. Pàgina 28

$$B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}\to B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}-B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to B\cdot\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0\\ -6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda-3\ a-6b=0\\ -2b=0\\ \lambda-3\ c-6d=0\\ -2d=0\end{cases}\to\begin{cases}\lambda-3\ a=0\\ b=0\\ \lambda-3\ c=0\\ d=0\end{cases}\to\lambda=3$$

Així doncs: $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}$

65. Pàgina 29

$$A^t=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

$$AA^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 4+\alpha^2\end{pmatrix}$$

$\alpha=5$

66. Pàgina 29

No ho podem assegurar. Per exemple, si considerem les matrius següents, el seu producte no és commutatiu:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Perquè el producte sigui commutatiu és necessari i suficient que la matriu A tingui la diagonal formada pel mateix nombre:

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=a\cdot I$$

Així, el producte d'aquesta matriu A amb una matriu B serà commutatiu.

67. Pàgina 29

Considerem $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix}$

Si igualem cada terme, tenim que:

$$\begin{cases} a+c=a+b \\ b+d=2a+b \\ 2a+c=c+d \\ 2b+d=2c+d \end{cases} \to \begin{cases} a=\alpha \\ b=\lambda \\ c=\lambda \\ d=2\alpha \end{cases} \to B=\begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \lambda & 2\alpha \end{pmatrix}$$

68. Pàgina 29

$$M^2-2M=3I\to\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Així, si igualem els termes corresponents, tenim que:

$$\begin{cases} a^2+b^2-2a=3 \\ 2ab-2b=0\to 2b(a-1)=0 \end{cases}$$

- Si $b=0 \to a^2+b^2-2a=3\to a^2-2a-3=0\to a_1=3,\ a_2=-1$
- Si $a=1 \to a^2+b^2-2a=3\to 1+b^2-2=3\to b_1=2,\ b_2=-2$

$$M=\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

69. Pàgina 29

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} m^2-4m+1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\to m^2-4m+1=1\to\begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

70. Pàgina 29

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \to A^2+B^2=\left[\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]^2+\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 1+2x & 2x \\ 4 & 2x+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix}\to x=3$$

71. Pàgina 29

$$A\cdot B^t=\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t=\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -8 \end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot A^t=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

72. Pàgina 29

$$I+A^3=mI+nA\rightarrow\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}\right]^3=m\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left[\begin{pmatrix}18&29\\-10&-16\end{pmatrix}\right]^3=m\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}32&58\\-20&-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17n+m&29n\\-10n&-17n+m\end{pmatrix}$$

Si igualem els termes, tenim que: $m=-2$ i $n=2$

73. Pàgina 29

$$A^2+\alpha\cdot A+\beta\cdot I=0\rightarrow\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta&4+\alpha\\4+\alpha&5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha=-4\\\beta=3\end{cases}$$

74. Pàgina 29

La matriu B ha de tenir dimensió 3×2 perquè es pugui multiplicar amb A i, a més, perquè obtinguem com a resultat una matriu 2×2.

Com que la primera fila és $(2\quad 0)$, aleshores: $B=\begin{pmatrix}2&0\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\c&d\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2+2e&2f\\4+c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$$

Si igualem els termes, tenim que:

$$\begin{cases}-2+2e=0\\2f=2\\4+c=3\\d=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=-1\\d=1\\e=1\\f=1\end{cases}\rightarrow B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

75. Pàgina 29

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&4\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

Per tant, A i B no compleixen la propietat commutativa per al producte.

76. Pàgina 29

Com que la matriu A és antisimètrica, tenim que: $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Així:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -\ a^2+b^2 & -bc & ac \\ -bc & -\ a^2+c^2 & -ab \\ ac & -ab & -\ b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

Si igualem cada terme, tenim que:

$$\begin{cases} -\ a^2+b^2 \ =-5 \\ -bc=-6 \\ ac=3 \\ -\ a^2+c^2 \ =-10 \\ -ab=-2 \\ -\ b^2+c^2 \ =-13 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} a,b,c \ = \ 1,2,3 \\ a,b,c \ = \ -1,-2,-3 \end{cases}$$

Per tant: $A=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

77. Pàgina 29

a) $A+B^{\ 2}=\left[\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2+B^2+2\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{cases} A+B^{\ 2}= \ A+B \ \cdot \ A+B \ =A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2 \\ A+B^{\ 2}=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 \end{cases}\right\}\rightarrow A\cdot B=B\cdot A$

Perquè es verifiqui la igualtat, les matrius han de complir la propietat commutativa de la multiplicació.

78. Pàgina 29

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2d & 2c+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 2d+5b & 0 \\ 5c+2a & 5d+2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si igualem cada terme, tenim que:

$$\begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \\ 2d+5b = 2a+5b \\ 5c+2a = 5c+2d \\ 5d+2b = 2c+5d \end{cases} \to \begin{cases} a = \lambda \\ b = \alpha \\ c = \alpha \\ d = \lambda \end{cases}$$

Les matrius que commuten tenen la forma: $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'altra banda:

$$a+d+1=5 \to \lambda+\lambda+1=5 \to 2\lambda=4 \to \lambda=2$$

La matriu que commuta amb la que ens donen, en la qual els elements de la diagonal principal sumen 5 i en què $a_{11} = -a_{12}$, està determinada per:

$$a+b=0 \to 2+\alpha=0 \to \alpha=-2 \to M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

79. Pàgina 29

$$X^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & m+a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} m^2 = 1 \to m = \pm 1 \\ m+a=0 \to m=-a \\ a^2 = 1 \to a = \pm 1 \\ s^2 = 1 \to s = \pm 1 \end{cases}$$

Així:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

80. Pàgina 29

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ n-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n-2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 41 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 82 & 1 \end{pmatrix}$$

81. Pàgina 29

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&8&0\\8&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&8&0\\8&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

Observem que segueix un patró: si l'exponent és senar, $A^n=\begin{pmatrix}0&0&2^n\\0&2^n&0\\2^n&0&0\end{pmatrix}$ i si és parell, $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$.

Així doncs: $A^{2.000}=\begin{pmatrix}2^{2.000}&0&0\\0&2^{2.000}&0\\0&0&2^{2.000}\end{pmatrix}$.

82. Pàgina 29

$A^2=2A-I$

$A^3=\ 2A-I\ A=2A^2-A=2\ 2A-I\ -A=3A-2I$

$A^4=4A-3I$

$A^n=nA-\ n-1\ I$

83. Pàgina 29

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$ $\qquad A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ $\qquad B^3=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}$ $\qquad B^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

84. Pàgina 29

a) $A\cdot B=B\cdot A\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}$ $\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}a=a+b\\b=b\\a+c=c+d\\b+d=d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\b=0\\c=\alpha\\d=\lambda\end{cases}\rightarrow B=\begin{pmatrix}\lambda&0\\\alpha&\lambda\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$