SÈRIE 1

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. *[2 punts]*

Considerem les variables x, y i z, que representen el nombre de participants que escullen el producte A, B i C, respectivament.

Obtenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -32 \end{cases}$$

Apliquem per resoldre'l el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1.000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array}\right).$$

Es veu clarament que és suficient intercanviar la segona i la tercera columnes per tenir la matriu diagonalitzada i, per tant, podem concloure que és un sistema compatible determinat. En la resolució s'obté $x = 133$, $y = 266$ i $z = 101$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}^2+a\cdot\boldsymbol{M}+b\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. *[1 punt]*

b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2:

$$M^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim el sistema:

$$\begin{pmatrix}14 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Que ens dona el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases}14+2a+b=0\\ 5+5a=0\\ 2+2a=0\\ 11-a+b=0\end{cases}$$

Tant de la segona com de la tercera equacions deduïm que $a=-1$, i substituint el valor de a, tant a la primera com a la quarta equació, obtenim que $b=-12$.

b) Hem de trobar els valors de x,y,z i t per als quals es compleix que

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Si fem els dos productes cal que es compleixi la igualtat:

$$\begin{pmatrix}z & t\\ x-z & y-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x-y\\ t & z-t\end{pmatrix}.$$

Per tant, cal que $z=y$, $t=x-y$, $x-z=t$ (però com que $z=y$, tornem a obtenir que $t=x-y$) i $y-t=z-t$ (que ens torna a donar que $z=y$).

Per tant, les úniques condicions que hem obtingut són $z=y$ i $t=x-y$. És a dir, la matriu A commutarà amb totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix}x & y\\ y & x-y\end{pmatrix},$$

per a qualsevol valor de x i de y.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,25 p. Obtenció dels valors de a i b: 0,5 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. Obtenció del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
   a) Calculeu el valor de a. *[1 punt]*
   b) Calculeu el valor de b. *[1 punt]*

a) Sabem que la recta tangent en el punt (-2, -6) és paral·lela a l'eix d'abscisses, per tant, el seu pendent és 0. Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}.$$

Per tant, $f'(-2) = a - 2$. Imposem que $f'(-2) = 0$ i trobem que $a = 2$.

b) Sabem que la funció passa pel punt (-2, -6). Per tant, sabem que $f(-2) = -6$. Tenim per tant que $2 \cdot (-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -6$, que ens dona $b - 8 = -6$ i, finalment, $b = 2$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Saber que el pendent ha de ser 0: 0,25 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de b: 0,5 p.

---

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

   a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? *[0,75 punts.]*

   b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? *[1,25 punts.]*

a) D'una banda $f(5) = 1$. Per tant, el dia 5 de febrer es van vendre, aproximadament, 1.000 unitats de perfum.

D'altra banda, $f(7) = 2$ i $f(9) = 5$. Per tant, entre el dia 7 i el dia 9 hi ha un increment aproximat de vendes de 3.000 unitats de perfum.

b) Per trobar el màxim de vendes, cal fer la derivada:
$f'(x) = \frac{-40 \cdot (2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2}$.

Si igualem la derivada a zero, trobem que hi ha un possible extrem relatiu en $x = 11$. Si fem un estudi del signe de la derivada, observem que, per a x menor d'11, la derivada és positiva, i, per tant, la funció creix, mentre que per a x més gran d'11, la derivada és negativa, i, per tant, la funció decreix. Deduïm, per tant, que en $x = 11$ hi ha un màxim.

Observem que $f(11) = 10$. Per tant, el dia que es van vendre més perfums va ser el dia 11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les vendes del dia 5: 0,25 p. Càlcul de les vendes dels dies 7 i 9 i càlcul de l'increment de vendes entre aquests dies: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del valor de vendes d'aquest dia: 0,25 p.

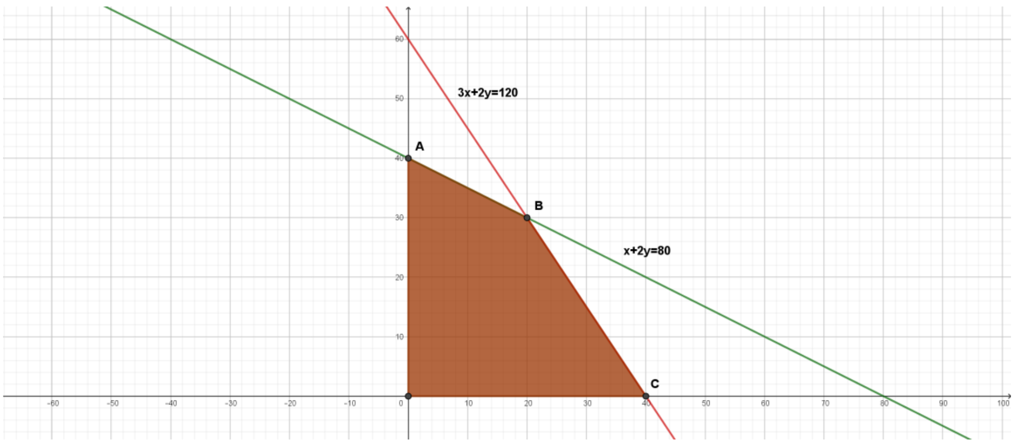
5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. *[0,75 punts]*

Segons l'enunciat el sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} x + 2y \le 80 \\ 3x + 2y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

on x representa el nombre de bicicletes de muntanya que cal fabricar i y el nombre de bicicletes de passeig.

La regió del pla solució del sistema d'inequacions és:



Es tracta d'una regió tancada del pla amb vèrtexs als punts $A = (0,40)$, $B = (20,30)$, $C = (40,0)$ i $D = (0,0)$.

La funció que dona el benefici és: $B(x, y) = 200x + 150y$.

El màxim s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió solució. Si avaluem la funció anterior en cada un dels vèrtexs:

$B(0{,}0) = 0$
$B(0{,}40) = 6.000$
$B(20{,}30) = 8.500$
$B(40{,}0) = 8.000$

Per tant, el benefici màxim és de 8.500 € i s'obté si es fabriquen 20 bicicletes de muntanya i 30 de passeig.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$
per a $10 \leq t \leq 21$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

a) La derivada de la funció $I(t)$ ve donada per $I'(t) = -10(m-t)(-1) = 10(m-t)$. Sabem que en $t = 18$ hi ha un extrem relatiu, per tant, $I'(18) = 0$, és a dir, $10(m-18) = 0$, i obtenim que $m = 18$.

b) També sabem que $I(21) = -5(18-21)^2 + n = 500$, i, per tant, obtenim que $n = 545$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Igualació del valor de la derivada en el punt t = 18 a 0: 0,25 p. Obtenció del valor de m: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de n: 0,5 p.

SÈRIE 4

RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

c) Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt. *[2 punts]*

Comencem calculant la derivada de la funció $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + a.$$

Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en $x = -1$ cal que en aquest punt s'anul·li la derivada. Imposant doncs que $f'(-1) = 0$ trobem que $a = -6$. Per tant la funció és $f(x) = 2x^3 - 6x$ i la derivada $f'(x) = 6x^2 - 6$. Observem que $f'(x) > 0$ per $x < -1$ i que $f'(x) < 0$ per $x \in (-1,1)$. Per tant la funció $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty, -1)$ i és decreixent en l'interval $(-1,1)$. Així doncs en el punt $x = -1$ hi trobem un màxim relatiu.

Finalment ens demanen $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 4.$

Criteris de correcció: Càlcul de la derivada: 0,5 p. Imposar que la derivada en el punt s'anul·la i trobar el valor de a: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,75 p. Càlcul del valor de la funció en el punt: 0,25 p.

---

d) L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50€. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120€.
Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont.
Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.

a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus. *[1,25 punts]*

b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos. *[0,75 punts]*

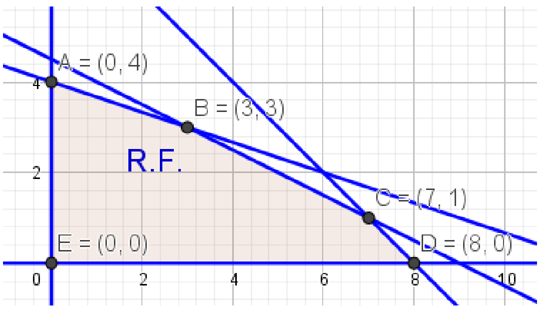
a) Anomenem x el nombre de paquets PB venuts i y el nombre de paquets PS venuts. Tenim les següents dades:

Paquets	*PB* (x)	*PS* (y)	Disponible
Ràfting	1	3	12
Barranquisme	1	2	9
Pònting	1	1	8
Preu (€)	50	120	

I, per tant, tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si les representem gràficament obtenim:



D'altra banda, la funció objectiu serà $Guanys(x, y) = 50x + 120y$.

b) Per saber quins són els ingressos màxims hem d'avaluar la funció objectiu en cada uns dels vèrtexs de la regió factible:

$$Guanys(A(0,4)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480 \text{ €}$$
$$Guanys(B(3,3)) = 50 \cdot 3 + 120 \cdot 3 = 510 \text{ €}$$

$Guanys(C(7,1)) = 50 \cdot 7 + 120 \cdot 1 = 470$ €
$Guanys(D(8,0)) = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 400$ €
$Guanys(E(0,0)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0$ €

Per tant, per obtenir els màxims beneficis caldrà vendre 3 paquets de cada tipus, PB i PS, i els ingressos que obtindrem seran de 510 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. *[0,75 punts]*

b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. *[1,25 punts]*

a) Tenint en compte que x és el nombre de mesos seguint la dieta cal considerar $Dom(f) = [0, +\infty)$. En aquest interval la funció f no presenta cap discontinuïtat, ja que l'únic valor de x pel qual s'anul·la el denominador és $x = -6$. Per estudiar si la funció és decreixent en aquest interval caldrà calcular la funció derivada de $f\,(x)$:

$$f'(x) = \frac{-132}{(x+6)^2}.$$

L'equació $f'(x) = 0$ no presenta cap solució i veiem clarament que $f'(x) < 0$ per a tot $x \geq 0$. Així doncs la funció és estrictament decreixent en tot el seu domini.

b) El pes inicial del pacient serà $f(0) = \frac{510}{6} = 85$. Al cap de dos mesos pesaria $f(2) = 79{,}5$ kg. Per saber a quin valor tendeix el pes cal calcular el límit de $f(x)$ quan $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{63x+510}{x+6} = 63.$$

Aquest valor no s'assolirà mai ja que la funció és estrictament decreixent per a tot $x \geq 0$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació de que la funció és decreixent per $x \geq 0$: 0,5 p. b) Càlcul del pes inicial: 0,25 p. Càlcul del pes als dos mesos: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,5 p. Justificació de que no s'assoleix: 0,25 p.

---

4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capses de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capses petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capses de cada tipus han elaborat? *[2 punts]*

Sigui x la quantitat de capses de bombons petites elaborades, y la quantitat de capses mitjanes i z la quantitat de grans.

A partir de les condicions de l'enunciat obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + \ y + \ z \ = \ 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2.650 \\ 2 \cdot (y + z) = x \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x - 2y - \ 2z = 0 \end{cases}$$

Si el resolem pel mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & -3 & -3 & -210 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & -6 & -120 \end{array}\right).$$

I d'aquí deduïm que $x = 140$, $y = 50$ i $z = 20$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

5 Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:

a) Escriviu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte. *[1 punt]*

b) Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà. *[1 punt]*

a) Anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 20 €. La funció que dona el benefici del comerciant és el producte entre dels diners que guanya per cada unitat venuda pel nombre d'unitats que ven:

$$B(x) = (400 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 600x + 12.000.$$

b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim derivem la funció $B(x)$:
$B'(x) = -120x + 600.$
Si igualem la derivada a zero veiem que hi ha un extrem relatiu en el punt $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per $x < 5$ i és negativa per $x > 5$.
Per tant el preu de venda és $750 - 5 \cdot 20 = 650$ €. D'altra banda, mensualment es vendran $30 + 5 \cdot 3 = 45$ unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció dels guanys per unitat venuda en funció de x: 0,25p. Obtenció del nombre d'unitats venudes en funció de x: 0,25p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,5p. b) Obtenció del punt on s'assoleix en màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del preu de venda: 0,25 p. Càlcul del nombre d'unitats venudes: 0,25p.

---

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1, A2$ i $A3$, segons els proveïdor $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x\ y\ z)$.

a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. *[0,5 punts]*

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? *[1,5 punts]*

a) Quan fem el producte de la comanda C per la matriu de preus unitaris P obtenim un vector fila que és el preu total de la comanda per cadascun dels tres proveïdors.

b) En aquest cas el vector de la comanda és $C = (25\ 10\ 15)$. Calculem el producte $C \cdot P$:

$$(25\ 10\ 15). \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430\ 415\ 410).$$

Per tant el preu total de la comanda és de 430 € pel proveïdor $p1$, de 415 € pel proveïdor $p2$ i de 410 € en el cas del proveïdor $p3$.

Així doncs el millor preu del total de la comanda ens l'ofereix el proveïdor $p3$ i és de 410 €.

Criteris de correcció: a) Explicació del que representa el producte C·P: 0,5 p. b) Escriure la comanda com a vector C: 0,25 p. Càlcul del producte C·P: 0,75 p. Obtenció del proveïdor que ofereix un millor preu total: 0,25 p. Obtenció del preu: 0,25 p.